

MA-225

Prof:

Jorge Cruz

Carlos Ulate

A. Rodríguez (Coordinadora)

A. Ledezma

J. Danilla

F. Araya

8

GUIA DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

II Ciclo 1988

CAPITULO 1

Tiempo asignado: 1 semanas

Preludio al Cálculo

Comentario:

Este capítulo contiene temas que el estudiante debe conocer y sobre los cuales debe tener un conocimiento fresco para una mejor asimilación de los capítulos siguientes.

Algunos de estos temas necesarios y fundamentales para el estudio del cálculo son: números reales y desigualdades, funciones y sus gráficas; rectas y pendientes; ecuaciones de círculos y de parábolas ya estudiados en MA0125 por lo que no los veremos en este curso.

En la sección 1.6 se introduce el límite de una función y el problema de encontrar tangentes a una curva y se utiliza el concepto de derivada como motivación para estudiar el límite de una función.

1.6 Recta tangente y derivada (una primera mirada)

Comentario:

Esta sección es la parte introductoria del límite de una función. Una forma poco usual pero muy geométrica por lo que le permite al estudiante visualizar en cada instante sobre lo que está trabajando.

No lo olvide, ésta es una forma de introducción para el capítulo de límites.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de calcular ciertas derivadas como un proceso límite.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. El concepto de recta secante, tangente y normal a una curva
2. Calcular la derivada de una función usando límites
3. Derivadas de funciones elementales
4. Interpretación geométrica de la derivada

Referencia:

De la página 30 a la página 39. Ejercicios del 1 al 36.

CAPITULO 2

Tiempo asignado: 2 semanas

Límites y continuidad

Comentario:

Este capítulo tiene por objeto enseñar el significado de límite. De los temas del cálculo diferencial e integral, éste es el más difícil.

El modo de tratar el concepto de límite siempre ha sido objeto de discusión en la enseñanza de la matemática. Cualquier posición tomada tiene sus pros y sus contras.

Es conveniente aclarar al estudiante que se pueden hacer muchas cosas en cálculo aunque no se haya comprendido a profundidad el concepto de límite y que muchas dificultades de asimilación no deben desanimarnos a seguir adelante. Muchas veces se alcanza una comprensión más profunda con el tiempo a fuerza de repetición, desmenuzando ideas.

2.1 Límites y sus leyes

Comentario:

Luego de una introducción formal y su interpretación geométrica de la definición de límite prácticamente hace olvido de ella para dedicarse a "investigar" el comportamiento de $f(x)$ al tomar x valores más y más próximos a x_0 .

Se hace uso de la intuición geométrica y en la "investigación" se hace una tabla de la función.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de definir el límite de una función y su interpretación geométrica, así como las leyes sobre límites.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Enunciar la definición de límite y su interpretación geométrica.
2. Cálculo de límites mediante "aproximaciones numéricas" y técnicas algebraicas
3. Enunciar y aplicar las leyes sobre límites
4. Viendo el gráfico de una función saber si el límite existe o no

Referencia:

De la página 42 a la página 52. Ejercicios del 1 al 50.

2.2 Límites unilaterales

Comentario:

En esta sección se mantiene la forma de presentación de la sección anterior, tanto para los límites unilaterales como para los límites infinitos.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de enunciar e interpretar geoméricamente la definición de límite unilateral, la relación entre éstos y el límite bilateral (global), así como los límites infinitos.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Enunciar e interpretar geoméricamente la definición de límites unilaterales
2. La relación (teorema) entre límites unilaterales y bilaterales
3. Saber las formas indefinidas:

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty} ; \frac{0}{\pm \infty} ; \frac{\pm \infty}{0} ; +\infty - \infty ; \frac{0}{0} ; (\pm \infty)^0 ; 1^{+\infty}$$

4. Viendo el gráfico de una función saber el comportamiento de los límites unilaterales
5. Calcular límites cuyo valor es infinito

Referencia:

De la página 54 a la página 58. Ejercicios del 1 al 35.

2.3 Combinaciones de funciones y funciones inversas

Comentario:

En esta sección se define toda una álgebra para operar con funciones, concluyendo con la propiedad de reflexión y la propiedad uno a uno de las funciones inversas.

Muchos de estos tópicos el estudiante ya los conoce por lo que no debe presentar mayor dificultad.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de efectuar operaciones, composiciones y calcular inversas de funciones.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Operar funciones (suma, resta, producto y cociente)
2. Realizar composiciones de funciones
3. Determinar funciones inversas y su gráfica
4. Propiedades de las funciones inversas

Referencia:

De la página 59 a la página 65. Ejercicios del 1 al 40.

2.4 Funciones continuas

Comentario:

La continuidad de una función, uno de los temas centrales del cálculo diferencial e integral, el texto mantiene su esquema, definiendo primero continuidad en un punto para pasar a continuidad en un intervalo, las propiedades sobre continuidad de la composición y de las inversas.

Como consecuencia de la continuidad sobre un intervalo cerrado tenemos las propiedades del valor máximo y del valor intermedio.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de definir e interpretar geoméricamente la continuidad en un punto y en un intervalo, así como para la composición de funciones y las inversas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Determinar e interpretar geoméricamente la continuidad en un punto o en un intervalo para una función
2. Lo mismo para composición de funciones y funciones inversas
3. Determinar el valor máximo de una función y el valor intermedio
4. La relación entre continuidad y diferenciabilidad

Referencia:

De la página 66 a la página 74. Ejercicios del 1 al 42.

2.5 Funciones trigonométricas y límites

Comentario:

La primera parte de esta sección (las funciones trigonométricas) fueron tema de estudio del curso MA0125 por lo que debe ponerse mayor énfasis a la segunda parte: límites y continuidad.

Objetivos:

Que el alumno sea capaz de operar, graficar y calcular límites de funciones trigonométricas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Graficar los valores de las funciones trigonométricas en los ángulos más importantes
2. Conversión de grados a radianes y viceversa
3. Continuidad de las funciones trigonométricas
4. Calcular límites en los que intervienen funciones trigonométricas
5. Demostración y aplicación del límite trigonométrico básico

Referencia:

De la página 76 a la página 86. Ejercicios del 1 al 48.

CAPITULO 3

Tiempo asignado: $2\frac{1}{2}$ semanas

Derivación

Comentario:

En este capítulo se define la derivada y se deducen las reglas de derivación para las funciones que se presentan con mayor frecuencia. Estas funciones incluyen polinomios, funciones racionales, funciones trigonométricas y composiciones de dichas funciones.

3.1 La derivada y las razones de cambio

Comentario:

Si bien el proceso de derivación, usando la definición, es tedioso y requiere de algún ingenio, debe quedar muy clara su interpretación geométrica (sección 1.6) y su interpretación como la razón de cambio instantánea de la función con respecto a su variable independiente así como la diferencia respecto a la razón promedio de cambio.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de definir la razón instantánea de cambio, la razón promedio de cambio y su interpretación según sea lo que represente la función.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular derivadas usando la definición y su respectiva interpretación
2. Usar las reglas de derivación para calcular razones instantáneas de cambio

Referencia:

De la página 96 a la página 103. Ejercicios del 1 al 35.

3.2 Reglas básicas de derivación

Comentario:

En esta sección se introducen las reglas de derivación las cuales hacen de este proceso algo más rápido, fácil y corto. Con estas y otras reglas será rutinario hallar la derivada de funciones complejas sin tener que recurrir a la definición pero que cuya interpretación debemos recordar.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de conocer y aplicar las diferentes leyes de derivación.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Aplicar las diferentes reglas de derivación: derivación de una constante; de una potencia; de una combinación lineal; de un producto; de un cociente y de una potencia para n negativo.

Referencia:

De la página 104 a la página 114. Ejercicios del 1 al 55.

3.3 Derivadas de funciones algebraicas

Comentario:

Como una introducción y para justificar la regla de la cadena se da y estudia la regla de la potencia generalizada.

Luego se da el teorema de diferenciación de una función inversa, el cual hace uso de la función f original y una vez conocida su derivada se "deshace del trabajo" de la f .

Concluye la sección definiendo la tangente vertical.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de calcular derivadas mediante la regla de la potencia generalizada, calcular la derivada de una función inversa y tangentes verticales a una curva.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Aplicar la regla de la potencia generalizada
2. Derivar una función inversa
3. Calcular tangentes verticales a una curva

Referencia:

De la página 114 a la página 119. Ejercicios del 1 al 45.

3.4 Máximos y mínimos de funciones en intervalos cerrados

Comentario:

Además de aclarar bien la terminología: continuidad; derivabilidad; máximo y mínimo local; máximos y mínimos absolutos; intervalos cerrados y abiertos que aparecen en las hipótesis de los teoremas de esta sección, es bueno mostrarle con contraejemplos cuando alguna de estas hipótesis no se cumple y así comprendan la necesidad de ellas.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de enunciar y aplicar los teoremas sobre máximos y mínimos (locales y absolutos) en intervalos cerrados.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular máximos y mínimos locales
2. Calcular máximos y mínimos absolutos
3. Enunciar los teoremas

Referencia:

De la página 119 a la página 124. Ejercicios del 1 al 32.

3.5 Problemas de aplicación de máximos y mínimos

Comentario:

En esta sección se estudian 6 ejemplos típicos cuyo objetivo es maximizar o minimizar. Para ello se usa el método para minimizar o maximizar funciones en un intervalo cerrado. Uno de los mayores obstáculos para el estudiante es cómo traducir cada problema al lenguaje matemático por lo que es buena costumbre explicitar los 5 puntos de la página 125 en cada ejercicio que se trabaje.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de plantear y resolver problemas de máximos y mínimos.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Traducir cada problema propuesto al lenguaje matemático
2. Resolver problemas de máximos y mínimos (usando los cinco puntos de la página 125)

Referencia:

De la página 124 a la página 134. Ejercicios del 1 al 35.

3.6 Derivadas de senos y cosenos

Comentario:

En esta sección se calcula la derivada de las funciones seno y coseno mediante la definición y la derivada de las otras 4 funciones trigonométricas se obtienen usando las reglas de derivación.

Es conveniente explicar la razón por la cual se usan radianes en lugar de grados, por lo general cuando se trabaja en cálculo.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de derivar las funciones trigonométricas y aplicar las reglas de derivación cuando se incluyen éstas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular la derivada del seno y coseno usando la definición
2. Calcular la derivada de las funciones trigonométricas
3. Aplicar las reglas de derivación cuando se incluyen funciones trigonométricas
4. Resolver problemas de máximos y mínimos que involucren trigonométricas

Referencia:

De la página 135 a la página 141. Ejercicios del 1 al 38.

3.7 Regla de la cadena

Comentario:

En esta sección se universaliza la regla de la potencia generalizada, tomándose como potencia ya no en real sino en cualquier función.

Esta es la regla de más difícil comprensión y aplicación de las derivadas y un comentario como el de la página 144 podría ayudar a su aprendizaje.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de enunciar y aplicar la regla de la cadena.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Explicitar las diferentes funciones en una composición
2. Enunciar la regla de la cadena
3. Aplicar la regla de la cadena

Referencia:

De la página 141 a la página 149. Ejercicios del 1 al 55.

3.8 Derivación implícita

Comentario:

En esta sección se aprende a calcular derivadas de relaciones donde no es posible (o no se quiere) despejar la variable dependiente.

Suponemos que todas las relaciones propuestas son diferenciables y por lo tanto podemos aplicar la regla de la cadena y luego resolver la ecuación resultante despejando la derivada.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de calcular derivadas implícitamente.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular derivadas implícitamente
2. Resolver problemas de máximos y mínimos con restricciones

Referencia:

De la página 149 a la página 155. Ejercicios del 1 al 35.

CAPITULO 4

Tiempo asignado: 2½ semanas

Aplicaciones de las derivadas y antiderivadas

4.1 Introducción

Comentario:

El presente capítulo aplica la derivada al cálculo de antiderivadas, trazo de curvas, diferenciales y estudia los teoremas del valor medio y de Rolle.

Referencia:

Página 178 del texto.

4.2 Incrementos, diferenciales y aproximación lineal

Comentario:

Se introduce la diferencial utilizando la tangente para aproximar valores de la función cerca del punto de tangencia, siguiendo una motivación algebraica y geométrica. Esta manera de introducir la diferencial tiene la ventaja de que el término que representa el error al utilizar la diferencial como aproximación aparece explícitamente.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de determinar Δx , Δy , dy y el error relativo de una relación.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular Δx , Δy ; dy y el error relativo
2. La interpretación geométrica de dichos términos
3. Utilizar la diferencial para aproximar valores de una función
4. Calcular errores relativos

Referencia:

De la página 179 a la página 184. Ejercicios del 1 al 50.

4.3 Teorema del valor medio y sus aplicaciones

Comentario:

Cuando los estudiantes se encuentran por primera vez con estos teoremas, les parece que las hipótesis fueron elegidas arbitrariamente (y a veces no les da importancia) y por lo tanto difíciles de recordar.

Para captar bien este punto es conveniente tener a mano un pequeño surtido de contraejemplos de los que la conclusión falla al no cumplirse alguna de las hipótesis. Por ejemplo, la conclusión del teorema de Rolle no se cumple para $f(x) = |x|$ en $[-2, 2]$, a pesar de ser f continua y $f(-2) = f(2)$.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de enunciar e interpretar geoméricamente el teorema de Rolle y el teorema del valor medio y sus corolarios.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Enunciar los teoremas de Rolle y valor medio y sus corolarios
2. Interpretación geométrica de ellos
3. Aplicar estos teoremas a situaciones concretas
4. Determinar donde una función es creciente y donde decreciente

Referencia:

De la página 184 a la página 193. Ejercicios del 1 al 45.

4.4 Criterio de la primera derivada

Comentario:

En esta sección se enuncia el teorema para determinar máximos y mínimos en un intervalo abierto. Este debe explicarse usando gráficos como los de la figura 4.12.

Luego se plantean problemas de máximos y mínimos y es bueno recordar que uno de los mayores obstáculos para el estudiante es cómo traducir cada problema al lenguaje matemático para resolverlo.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de determinar los extremos de una función y traducir cada problema planteado al lenguaje matemático para minimizar o maximizar.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Hallar los extremos de una función utilizando la primera derivada
2. Diagnosticar si un extremo se trata de un máximo o un mínimo
3. Traducir problemas planteados al lenguaje matemático para minimizar o maximizar

Referencia:

De la página 192 a la página 197. Ejercicios del 1 al 34.

4.5 Gráficas de polinomios

Comentario:

Aquí se utilizan los conocimientos adquiridos hasta el momento para obtener información acerca de máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento y valor en los extremos de una función (polinomial) para graficarla.

Por la exposición de los temas, el criterio de la segunda derivada se estudia en 4.6; asíntotas en 4.7; una forma podría ser estudiar 4.5; 4.6 y 4.7 juntos y luego hacer el análisis para graficar.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de construir la gráfica de una función polinomial.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

Construir la gráfica de una función polinomial utilizando:

1. Los puntos críticos de f
2. Los intervalos en los que f es creciente o decreciente
3. El comportamiento de f cuando $x \rightarrow \pm \infty$
4. Intersección con los ejes coordenados
5. Máximos y mínimos locales

Referencia:

De la página 197 a la página 203. Ejercicios del 1 al 38.

4.6 Derivadas superiores y concavidad

Comentario:

En esta sección se definen las derivadas de orden superior y el significado geométrico de la segunda derivada e introduce los conceptos de cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, punto de inflexión y número de inflexión. Desarrolla además un criterio, mediante la segunda derivada, para máximos y mínimos locales así como para los puntos de inflexión.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de utilizar las derivadas como instrumento para localizar los rasgos claves de una gráfica.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular derivadas de orden superior
2. Definición de concavidad y punto de inflexión
3. Hallar extremos de una función utilizando la primera y segunda derivada para diagnosticar la existencia de un máximo o un mínimo o un punto de inflexión
4. Hallar los intervalos en los que la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo
5. Trazar gráficas de funciones polinomiales utilizando dichos criterios

Referencia:

De la página 204 a la página 213. Ejercicios del 1 al 48.

4.7 Trazo de curvas y asíntotas

Comentario:

Con la introducción de las asíntotas se completa el estudio que debe hacérsale a una función para trazar su gráfica.

Quando se diga estudio completo de una función para trazar su gráfica el análisis de los siguientes 7 puntos:

1. Dominio de la función e intersección con los ejes coordenados
2. Sentido de variación de f y determinación de puntos críticos
3. Concavidad y clasificación de los puntos críticos
4. Valor en los extremos del dominio
5. Asíntotas
6. Cuadro de variación (resumen de toda la información anterior)
7. Gráfico de f

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de trazar curvas haciendo el estudio completo de la función.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Trazar el gráfico de una función haciendo el estudio completo de la función

Referencia:

De la página 213 a la página 221. Ejercicios del 1 al 42.

4.8 Antiderivadas

Comentario:

Esta es una sección introducción de la integral, donde este concepto, jugará un papel esencial y concluimos el curso viendo técnicas para calcular primitivas.

Esta debe estudiarse como el proceso inverso de la derivación así como la linealidad del mismo.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de calcular antiderivadas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. La definición de antiderivada
2. Enunciar el teorema la antiderivada más general y su interpretación geométrica
4. Fórmulas de antidiferenciación
4. La linealidad de la antidiferenciación
5. Antidiferenciación de la regla de la cadena

Referencia:

De la página 221 a la página 229. Ejercicios del 1 al 65.

CAPITULO 5

Tiempo asignado: 2 semanas

La integral

5.1 Introducción:

Comentario:

Este capítulo se basa en la definición y propiedades de la integral y está fundamentado en el problema de definir y calcular el área de una región plana.

Pero debemos recordarle al alumno que la riqueza de la integral no es calcular áreas, sino a sus aplicaciones a muchos problemas que no parecen estar relacionados con su motivación original.

Si bien es cierto que no haremos demostraciones de sus teoremas y propiedades, si haremos uso de la justificación e interpretación geométrica siempre que sea posible.

Referencia:

Página 250 del texto.

5.2 Cálculo elemental de áreas

Comentario:

En esta sección se introduce el concepto de área y sus respectivas propiedades, concepto necesario para atacar el problema de áreas por el método de exhaustión.

Para usar este método se hace necesario una notación compacta para la suma de muchos números por lo cual se introduce la notación sumatoria y sus propiedades.

Puesto que no veremos inducción matemática, las identidades 6, 7, 8, 9 y 10, página 253, serán aceptadas.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de manejar la notación sumatoria, al manejo de subíndices para indicar particiones, así como la aplicación de la ley del emparedado para hallar áreas bajo la gráfica de una curva.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Saber el concepto de área y sus propiedades
2. Manejar la notación sumatoria
3. Conocer de memoria las fórmulas del 6 al 10 de la página 253
4. Calcular áreas bajo la gráfica de una curva por el método de exhaustión

Referencia:

De la página 250 a la página 259. Ejercicios del 1 al 26.

5.3 Sumas de Riemann e Integral

Comentario:

Se define aquí la suma de Riemann para una función determinada así como la integral definida y el teorema de existencia y la integral como límite de una sucesión.

Objetivo:

El estudiante debe ser capaz de conocer una suma de Riemann y su interpretación geométrica, además calcular integrales definidas haciendo uso de ellas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular sumas de Riemann y su interpretación geométrica
2. Calcular integrales definidas mediante sumas de Riemann
3. El teorema de existencia de la integral
4. La integral como límite de una sucesión
5. Interpretación geométrica de las propiedades 6 y 7 de la página 263

Referencia:

De la página 260 a la página 267. Ejercicios del 1 al 37.

5.4 Evaluación de integrales

Comentario:

Lo que en otros libros se conoce como Primer Teorema Fundamental del Cálculo, en éste se llama Evaluación de Integrales y debe quedar claro que este teorema es el que liga las sumas rimannianas con las primitivas. Concluye la sección con las propiedades básicas de las integrales, que deben ser justificadas geoméricamente.

Objetivo:

El estudiante debe saber las propiedades básicas de las integrales y su interpretación geométrica así como el teorema de Evaluación de Integrales.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. El teorema de evaluación de integrales
2. La diferencia entre $\int_a^b f(x)dx$ y $\left. \int f(x)dx \right|_a^b$ y porqué son iguales
3. Evaluar integrales definidas
4. Las propiedades básicas de las integrales, su interpretación geométrica y su aplicación
5. Evaluar algunos límites reconociéndolos como el valor de una integral

Referencia:

De la página 268 a la página 274. Ejercicios del 1 al 37.

5.5 Teorema fundamental del cálculo

Comentario:

Intimamente ligado al teorema de Evaluación de Integrales, hay otro teorema llamado teorema fundamental del cálculo.

Este describe la conexión entre la derivada y la integral definida, de forma diferente a como lo hizo el teorema de Evaluación.

Previo a este teorema fundamental se encuentra el teorema del valor promedio con su respectiva interpretación geométrica.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de conocer y aplicar el teorema fundamental del cálculo así como el teorema del valor promedio.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular el valor promedio de una función y su interpretación geométrica
2. Enunciar el teorema del valor promedio y el teorema fundamental
3. Aplicar el teorema fundamental del cálculo

Referencia:

De la página 274 a la página 281. Ejercicios del 1 al 48.

5.6 Integración por sustitución

Comentario:

Esta sección desarrolla la técnica de integrar por sustitución, que es la técnica fundamental para la obtención de antiderivadas. Este método se basa en la regla de la cadena y en una lista de integrales inmediatas que hay que memorizar.

Para desarrollar con éxito esta técnica, hace falta una cierta facilidad para reconocer una de las formas tipo en una función integrando dada.

Una vez superado este escollo, queda el camino expedito para una sustitución formal o para ajustes del integrando insertando constantes, de modo que sea aplicable la regla de la cadena.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de reproducir una pequeña tabla de integrales y el teorema integración definida por sustitución así como su aplicación.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Escribir de memoria una pequeña tabla de integrales
2. Integrar por el método de sustitución
3. Cambiar los límites de integración al aplicar sustitución y calcular la indefinida regresando a la variable original.

Referencia:

De la página 282 a la página 286. Ejercicios del 1 al 44.