MA-225

J. Cruz
C Ulate
A. Rodríguez
A. Ledezma
J. Bonilla
F. Araya.

GUIA DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

II Ciclo 1988

CAPITULO 1

Tiempo asignado: 1 semanas

Preludio al Cálculo

Comentario:

Este capítulo contiene temas que el estudiante debe conocer y sobre los cuales debe tener un conocimiento fresco para una mejor asimilación de los capítulos siguientes.

Algunos de estos temas necesarios y fundamentales para el estudio del cálculo son: números reales y desigualdades, funciones y sus gráficas; rectas y pendientes; ecuaciones de círculos y de parábolas ya estudiados en MA0125 . por lo que no los veremos en este curso.

En la sección 1.6 se introduce el límite de una función y el problema de encontrar tangentes a una curva y se utiliza el concepto de derivada como motivación para estudiar el límite de una función.

1.6 Recta tangente y derivada (una primera mirada)

Comentario:

Esta sección es la parte introductoria del límite de una función. Una forma poco usual pero muy geométrica por lo que le permite al estudiante visualizar en cada instante sobre lo que está trabajando.

No lo olvide, ésta es una forma de introducción para el capítulo de límites.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de calcular ciertas derivadas como un proceso límite.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. El concepto de recta secante, tangente y normal a una curva
2. Calcular la derivada de una función usando límites
3. Derivadas de funciones elementales
4. Interpretación geométrica de la derivada

Referencia:

De la página 30 a la página 39. Ejercicios del 1 al 36.

CAPITULO 2

Tiempo asignado: 2 semanas

Límites y continuidad

Comentario:

Este capítulo tiene por objeto enseñar el significado de límite. De los temas del cálculo diferencial e integral, éste es el más difícil.

El modo de tratar el concepto de límite siempre ha sido objeto de discusión en la enseñanza de la matemática. Cualquier posición tomada tiene sus pro y sus contras.

Es conveniente aclarar al estudiante que se pueden hacer muchas cosas en cálculo aunque no se haya comprendido a profundidad el concepto de límite y que muchas dificultades de asimilación no deben desanimarnos a seguir adelante. Muchas veces se alcanza una comprensión más profunda con el tiempo a fuerza de repetición, desmenuzando ideas.

2.1 Límites y sus leyes

Comentario:

Luego de una introducción formal y su interpretación geométrica de la definición de límite prácticamente hace olvido de ella para dedicarse a "investigar" el comportamiento de f(x) al tomar x valores más y más próximos a x_o.

Se hace uso de la intuición geométrica y en la "investigación" se hace una tabla de la función.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de definir el límite de una función y su interpretación geométrica, así como las leyes sobre límites.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Enunciar la definición de límite y su interpretación geométrica.
2. Cálculo de límites mediante "aproximaciones numéricas" y técnicas algebraicas
3. Enunciar y aplicar las leyes sobre límites
4. Viendo el gráfico de una función saber si el límite existe o no

Referencia:

De la página 42 a la página 52. Ejercicios del 1 al 50.

2.2 Límites unilaterales

Comentario:

En esta sección se mantiene la forma de presentación de la sección anterior, tanto para los límites unilaterales como para los límites infinitos.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de enunciar e interpretar geométricamente la definición de límite unilateral, la relación entre éstos y el límite bilateral (global), así como los límites infinitos.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Enunciar e interpretar geométricamente la definición de límites unilaterales
2. La relación (teorema) entre límites unilaterales y bilaterales
3. Saber las formas indefinidas:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ ;\ \frac{0}{\pm\infty}\ ;\ \frac{\pm\infty}{0}\ ;\ +\infty-\infty;\ \frac{0}{0}\ ;\ (\pm\infty)0\ ;\ 1^{+\infty}$$

4. Viendo el gráfico de una función saber el comportamiento de los límites unilaterales
5. Calcular límites cuyo valor es infinito

Referencia:

De la página 54 a la página 58. Ejercicios del 1 al 35.

2.3 Combinaciones de funciones y funciones inversas

Comentario:

En esta sección se define toda una álgebra para operar con funciones, concluyendo con la propiedad de reflexión y la propiedad uno a uno de las funciones inversas.

Muchos de estos tópicos el estudiante ya los conoce por lo que no debe presentar mayor dificultad.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de efectuar operaciones, composiciones y calcular inversas de funciones.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Operar funciones (suma, resta, producto y cociente)
2. Realizar composiciones de funciones
3. Determinar funciones inversas y su gráfica
4. Propiedades de las funciones inversas

Referencia:

De la página 59 a la página 65. Ejercicios del 1 al 40.

2.4 Funciones continuas

Comentario:

La continuidad de una función, uno de los temas centrales del cálculo diferencial e integral, el texto mantiene su esquema, definiendo primero continuidad en un punto para pasar a continuidad en un intervalo, las propiedades sobre continuidad de la composición y de las inversas.

Como consecuencia de la continuidad sobre un intervalo cerrado tenemos las propiedades del valor máximo y del valor intermedio.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de definir e interpretar geométricamente la continuidad en un punto y en un intervalo, así como para la composición de funciones y las inversas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Determinar e interpretar geométricamente la continuidad en un punto o en un intervalo para una función
2. Lo mismo para composición de funciones y funciones inversas
3. Determinar el valor máximo de una función y el valor intermedio
4. La relación entre continuidad y diferenciabilidad

Referencia:

De la página 66 a la página 74. Ejercicios del 1 al 42.

2.5 Funciones trigonométricas y límites

Comentario:

La primera parte de esta sección (las funciones trigonométricas) fueron tema de estudio del curso MA0125 por lo que debe ponérsele mayor énfasis a la segunda parte: límites y continuidad.

Objetivos:

Que el alumno sea capaz de operar, graficar y calcular límites de funciones trigonométricas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Graficar los valores de las funciones trigonométricas en los ángulos más importantes
2. Conversión de grados a radianes y viceversa
3. Continuidad de las funciones trigonométricas
4. Calcular límites en los que intervienen funciones trigonométricas
5. Demostración y aplicación del límite trigonométrico básico

Referencia:

De la página 76 a la página 86. Ejercicios del 1 al 48.

CAPITULO 3

Tiempo asignado: $2\frac{1}{2}$ semanas

Derivación

Comentario:

En este capítulo se define la derivada y se deducen las reglas de derivación para las funciones que se presentan con mayor frecuencia. Estas funciones incluyen polinomios, funciones racionales, funciones trigonométricas y composiciones de dichas funciones.

3.1 La derivada y las razones de cambio

Comentario:

Si bien el proceso de derivación, usando la definición, es tedioso y requiere de algún ingenio, debe quedar muy claro su interpretación geométrica (sección 1.6) y su interpretación como la razón de cambio instantánea de la función con respecto a su variable independiente así como la diferencia respecto a la razón promedio de cambio.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de definir la razón instantánea de cambio, la razón promedio de cambio y su interpretación según sea lo que represente la función.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular derivadas usando la definición y su respectiva interpretación

2. Usar las reglas de derivación para calcular razones instantáneas de cambio

Referencia:

De la pagina 96 a la página 103. Ejercicios del 1 al 35.

3.2 Reglas básicas de derivación

Comentario:

En esta sección se introducen las reglas de derivación las cuales hacen de este proceso algo más rápido, fácil y corto. Con estas y otras reglas será rutinario hallar la derivada de funciones complejas sin tener que recurrir a la definición pero que cuya interpretación debemos recordar.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de conocer y aplicar las diferentes leyes de derivación.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Aplicar las diferentes reglas de derivación: derivación de una constante; de una potencia; de una combinación lineal; de un producto; de un cociente y de una potencia para n negativo.

Referencia:

De la página 104 a la página 114. Ejercicios del 1 al 55.

3.3 Derivadas de funciones algebraicas

Comentario:

Como una introducción y para justificar la regla de la cadena se da y estudia la regla de la potencia generalizada.

Luego se da el teorema de diferenciación de una función inversa, el cual hace uso de la función f original y una vez conocida su derivada se "deshace del trabajo" de la f.

Concluye la sección definiendo la tangente vértical.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de calcular derivadas mediante la regla de la potencia generalizada, calcular la derivada de una función inversa y tangentes vérticales a una curva.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Aplicar la regla de la potencia generalizada

2. Derivar una función inversa

3. Calcular tangentes vérticales a una curva

Referencia:

De la pağina 114 a la página 119. Ejercicios del 1 al 45.

3.4 Máximos y mínimos de funciones en intervalos cerrados

Comentario:

Además de aclarar bien la terminología: continuidad; derivabilidad; máximo y mínimo local; máximos y mínimos absolutos; intervalos cerrados y abiertos que aparecen en las hipótesis de los teoremas de esta sección, es bueno mostrarle con contraejemplos cuando alguna de estas hipótesis no se cumple y así comprendan la necesidad de ellas.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de enunciar y aplicar los teoremas sobre máximos y mínimos (locales y absolutos) en intervalos cerrados.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular máximos y mínimos locales
2. Calcular máximos y mínimos absolutos
3. Enunciar los teoremas

Referencia:

De la página 119 a la página 124. Ejercicios del 1 al 32.

3.5 Problemas de aplicación de máximos y mínimos

Comentario:

En esta sección se estudian 6 ejemplos típicos cuyo objetivo es maximizar o minimizar. Para ello se usa el método para minimizar o maximizar funciones en un intervalo cerrado. Uno de los mayores obstáculos para el estudiante es cómo traducir cada problema al lenguaje matemático por lo que es buena costumbre explicitar los 5 puntos de la página 125 en cada ejercicio que se trabaje.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de plantear y resolver problemas de máximos y mínimos.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Traducir cada problema propuesto al lenguaje matemático
2. Resolver problemas de máximos y mínimos (usando los cinco puntos de la página 125)

Referencia:

De la página 124 a la página 134. Ejercicios del 1 al 35.

3.6 Derivadas de senos y cosenos

Comentario:

En esta sección se calcula la derivada de las funciones seno y coseno mediante la definición y la derivada de las otras 4 funciones trigonométricas se obtienen usando las reglas de derivación.

Es conveniente explicar la razón por la cual se usan radianes en lugar de grados, por lo general cuando se trabaja en cálculo.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de derivar las funciones trigonométricas y aplicar las reglas de derivación cuando se incluyen éstas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular la derivada del seno y coseno usando la definición
2. Calcular la derivada de las funciones trigonométricas
3. Aplicar las reglas de derivación cuando se incluyen funciones trigonométricas
4. Resolver problemas de máximos y mínimos que involucren trigonométricas

Referencia:

De la página 135 a la página 141. Ejercicios del 1 al 38.

3.7 Regla de la cadena

Comentario:

En esta sección se universaliza la regla de la potencia generalizada tomándose como potencia ya no en real sino en cualquier función.

Esta es la regla de más difícil comprensión y aplicación de las derivadas y un comentario como el de la página 144 podría ayudar a su aprendizaje.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de enunciar y aplicar la regla de la cadena.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Explicitar las diferentes funciones en una composición
2. Enunciar la regla de la cadena
3. Aplicar la regla de la cadena

Referencia:

De la pagina 141 a la página 149. Ejercicios del 1 al 55.

3.8 Derivación implícita

Comentario:

En esta sección se aprende a calcular derivadas de relaciones donde no es posible (o no se quiere) despejar la variable dependiente.

Suponemos que todas las relaciones propuestas son diferenciables y por lo tanto podemos aplicar la regla de la cadena y luego resolver la ecuación resultante despejando la derivada.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de calcular derivadas implícitamente.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular derivadas implícitamente
2. Resolver problemas de máximos y mínimos con restricciones

Referencia:

De la página 149 a la página 155. Ejercicios del 1 al 35.

CAPITULO 4

Tiempo asignado: 2½ semanas

Aplicaciones de las derivadas y antiderivadas

4.1 Introducción

Comentario:

El presente capítulo aplica la derivada al cálculo de antiderivadas, trazo de curvas, diferenciales y estudia los teoremas del valor medio y de Rolle.

Referencia:

Página 178 del texto.

4.2 Incrementos, diferenciales y aproximación lineal

Comentario:

Se introduce la diferencial utilizando la tangente para aproximar valores de la función cerca del punto de tangencia, siguiendo una motivación algebraica y geométrica. Esta manera de introducir la diferencial tiene la ventaja de que el término que representa el error al utilizar la diferencial como aproximación aparece explícitamente.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de determinar Δx, Δy, dy y el error relativo de una relación.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular Δx, Δy; dy y el error relativo
2. La interpretación geométrica de dichos términos
3. Utilizar la diferencial para aproximar valores de una función
4. Calcular errores relativos

Referencia:

De la página 179 a la página 184. Ejercicios del 1 al 50.

4.3 Teorema del valor medio y sus aplicaciones

Comentario:

Cuando los estudiantes se encuentran por primera vez con estos teoremas, les parece que las hipótesis fueron elegidas arbitrariamente (y a veces no les da importancia) y por lo tanto difíciles de recordar.

Para captar bien este punto es conveniente tener a mano un pequeño surtido de contraejemplos de los que la conclusión falla al no cumplirse alguna de las hipótesis. Por ejemplo, la conclusión del teorema de Rolle no se cumple para $f(x) = |x|$ en $[-2,2]$, a pesar de ser f continua y $f(-2) = f(2)$

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de enunciar e interpretar geométricamente el teorema de Rolle y el teorema del valor medio y sus corolarios.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Enunciar los teoremas de Rolle y valor medio y sus corolarios
2. Interpretación geométrica de ellos
3. Aplicar estos teoremas a situaciones concretas
4. Determinar donde una función es creciente y donde decreciente

Referencia:

De la página 184 a la página 193. Ejercicios del 1 al 45.

4.4 Criterio de la primera derivada

Comentario:

En esta sección se enuncia el teorema para determinar máximos y mínimos en un intervalo abierto. Este debe explicarse usando gráficos como los de la figura 4.12.

Luego se plantean problemas de máximos y mínimos y es bueno recordar que uno de los mayores obstáculos para el estudiante es cómo traducir cada problema al lenguaje matemático para resolverlo.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de determinar los extremos de una función y traducir cada problema planteado al lenguaje matemático para minimizar o maximizar.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Hallar los extremos de una función utilizando la primera derivada
2. Diagnosticar si un extremo se trata de un máximo o un mínimo
3. Traducir problemas planteados al lenguaje matemático para minimizar o maximizar

Referencia:

De la página 192 a la página 197. Ejercicios del 1 al 34.

4.5 Gráficas de polinomios

Comentario:

Aquí se utilizan los conocimientos adquiridos hasta el momento para obtener información acerca de máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento y valor en los extremos de una función (polinomial) para graficarla.

Por la exposición de los temas, el criterio de la segunda derivada se estudia en 4.6; asíntotas en 4.7; una forma podría ser estudiar 4.5; 4.6 y 4.7 juntos y luego hacer el análisis para graficar.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de construir la gráfica de una función polinomial.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

Construir la gráfica de una función polinomial utilizando:

1. Los puntos críticos de f
2. Los intervalos en los que f es creciente o decreciente
3. El comportamiento de f cuando $x \longrightarrow \pm \infty$
4. Intersección con los ejes coordenados
5. Máximos y mínimos locales

Referencia:

De la página 197 a la página 203. Ejercicios del 1 al 38.

4.6 Derivadas superiores y concavidad

Comentario:

En esta sección se definen las derivadas de orden superior y el significado geométrico de la segunda derivada e introduce los conceptos de cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, punto de inflexión y número de inflexión. Desarrolla además un criterio, mediante la segunda derivada, para máximos y mínimos locales así como para los puntos de inflexión.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de utilizar las derivadas como instrumento para localizar los rasgos claves de una gráfica.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular derivadas de orden superior
2. Definición de concavidad y punto de inflexión
3. Hallar extremos de una función utilizando la primera y segunda derivada para diagnosticar la existencia de un máximo o un mínimo o un punto de inflexión
4. Hallar los intervalos en los que la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo
5. Trazar gráficas de funciones polinomiales utilizando dichos criterios

Referencia:

De la página 204 a la página 213. Ejercicios del 1 al 48.

4.7 Trazo de curvas y asíntotas

Comentario:

Con la introducción de las asíntotas se completa el estudio que debe hacérsele a una función para trazar su gráfica.

Cuando se diga estudio completo de una función para trazar su gráfica el análisis de los siguientes 7 puntos:

1. Dominio de la función e intersección con los ejes coordenados
2. Sentido de variación de f y determinación de puntos críticos
3. Concavidad y clasificación de los puntos críticos
4. Valor en los extremos del dominio
5. Asíntotas
6. Cuadro de variación (resumen de toda la información anterior)
7. Gráfico de f

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de trazar curvas haciendo el estudio completo de la función.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Trazar el gráfico de una función haciendo el estudio completo de la función

Referencia:

De la página 213 a la página 221. Ejercicios del 1 al 42.

4.8 Antiderivadas

Comentario:

Esta es una sección introducción de la integral, donde este concepto jugará un papel esencial y concluimos el curso viendo técnicas para calcular primitivas.

Esta debe estudiarse como el proceso inverso de la derivación así como la linealidad del mismo.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de calcular antiderivadas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. La definición de antiderivada

2. Enunciar el teorema la antiderivada más general y su interpretación geométrica

4. Fórmulas de antidiferenciación

4. La linealidad de la antidiferenciación

5. Antidiferenciación de la regla de la cadena

Referencia:

De la página 221 a la página 229. Ejercicios del 1 al 65.

CAPITULO 5

Tiempo asignado: 2 -

La integral

ión:

capítulo se basa en la definición y propiedades de la integral ndamentado en el problema de definir y calcular el área de plana.

o debemos recordarle al alumno que la riqueza de la integral calcular áreas, sino a sus aplicaciones a muchos problemas que cen estar relacionados con su motivación original.

Si bien es cierto que no haremos demostraciones de sus teoremas piedades, si haremos uso de la justificación e interpretación geomé- a siempre que sea posible.

eferencia:

Página 250 del texto.

5.2 Cálculo elemental de áreas

Comentario:

En esta sección se introduce el concepto de área y sus respectivas propiedades, concepto necesario para atacar el problema de áreas por el método de exhaución.

Para usar este método se hace necesario una notación compacta para la suma de muchos números por lo cual se introduce la notación sumatoria y sus propiedades.

Puesto que no veremos inducción matemática, las identidades 6, 7, 8, 9 y 10, página 253, serán aceptadas.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de manejar la notación sumatoria, al manejo de subíndices para indicar particiones, así como la aplicación de la ley del emparedado para hallar áreas bajo la gráfica de una curva.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Saber el concepto de área y sus propiedades
2. Manejar la notación sumatoria
3. Conocer de memoria las fórmulas del 6 al 10 de la página 253
4. Calcular áreas bajo la gráfica de una curva por el método de exhaución

Referencia:

De la página 250 a la página 259. Ejercicios del 1 al 26.

5.3 Sumas de Riemann e Integral

Comentario:

Se define aquí la suma de Riemann para una función determinada así como la integral definida y el teorema de existencia y la integral como límite de una sucesión.

Objetivo:

El estudiante debe ser capaz de conocer una suma de Riemann y su interpretación geométrica, además calcular integrales definidas haciendo uso de ellas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular sumas de Riemann y su interpretación geométrica
2. Calcular integrales definidas mediante sumas de Riemann
3. El teorema de existencia de la integral
4. La integral como límite de una sucesión
5. Interpretación geométrica de las propiedades 6 y 7 de la página 263

Referencia:

De la página 260 a la página 267. Ejercicios del 1 al 37.

5.4 Evaluación de integrales

Comentario:

Lo que en otros libros se conoce como Primer Teorema Fundamental del Cálculo, en éste se llama Evaluación de Integrales y debe quedar claro que este teorema es el que liga las sumas rimannianas con las primitivas. Concluye la sección con las propiedades básicas de las integrales, que deben ser justificadas geométricamente.

Objetivo:

El estudiante debe saber las propiedades básicas de las integrales y su interpretación geométrica así como el teorema de Evaluación de Integrales.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. El teorema de evaluación de integrales
2. La diferencia entre $\int_a^b f(x)dx$ y $\int f(x)dx \Big|_a^b$ y porqué son iguales
3. Evaluar integrales definidas
4. Las propiedades básicas de las integrales, su interpretación geométrica y su aplicación
5. Evaluar algunos límites reconociéndolos como el valor de una integral

Referencia:

De la página 268 a la página 274. Ejercicios del 1 al 37.

5.5 Teorema fundamental del cálculo

Comentario:

Intimamente ligado al teorema de Evaluación de Integrales, hay otro teorema llamado teorema fundalmental del cálculo.

Este describe la conexión entre la derivada y la integral definida, de forma diferente a como lo hizo el teorema de Evaluación.

Previo a este teorema fundamental se encuentra el teorema del valor promedio con su respectiva interpretación geométrica.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de conocer y aplicar el teorema fundamental del cálculo así como el teorema del valor promedio.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular el valor promedio de una función y su interpretación geométrica

2. Enunciar el teorema del valor promedio y el teorema fundamental

3. Aplicar el teorema fundamental del cálculo

Referencia:

De la página 274 a la página 281. Ejercicios del 1 al 48.

5.6 Integración por sustitución

Comentario:

Esta sección desarrolla la técnica de integrar por sustitución, que es la técnica fundamental para la obtención de antiderivadas. Este método se basa en la regla de la cadena y en una lista de integrales inmediatas que hay que memorizar.

Para desarrollar con éxito esta técnica, hace falta una cierta facilidad para reconocer una de las formas tipo en una función integrando dada.

Una vez superado este escollo, queda el camino expédito para una sustitución formal o para ajustes del integrando insertando constantes, de modo que sea aplicable la regla de la cadena.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de reproducir una pequeña tabla de integrales y el teorema integración definida por sustitución así como su aplicación.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Escribir de memoria una pequeña tabla de integrales
2. Integrar por el método de sustitución
3. Cambiar los límites de integración al aplicar sustitución y calcular la indefinida regresando a la variable original.

Referencias:

De la página 282 a la página 286. Ejercicios del 1 al 44.

5.7 Cálculo de áreas mediante integración

Comentario:

Esta sección retoma la cuestión del área tal como la dejó las secciones 5.2 y 5.3 donde se introdujo la integral definida.

Si bien es cierto que se ha probado la utilidad de la integral definida para calcular áreas, debe dársele al estudiante una panorámica mayor de la aplicabilidad de la integral como por ejemplo en Ecuaciones diferenciales aplicadas de Murray R. Spiegel. Capítulo 3.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de calcular áreas mediante integración.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular el área entre una curva y el eje de las absisas
2. Calcular áreas entre dos curvas

Referencia:

De la página 286 a la página 295. Ejercicios del 1 al 46.

CAPITULO 7

Tiempo asignado: 2 semanas

Función exponencial y logarítmica

7.1 Introducción

Comentario:

Este capítulo se inicia con la definición de leyes de los exponentes para todo exponente racional (tabla 1) para luego cuestionarnos con un exponente irracional, con la idea de motivar el estudio de la función $f(x) = a^x$: función exponencial de base a, como una generalización de la anterior.

Luego "viendo" el gráfico obtiene la función inversa: la función logarítmica de base a, $\log_a x$ (ver sección 2.3). Siguiendo con las leyes de los logaritmos para por último calcular la derivada de las funciones logarítmica y exponencial.

Objetivo:

En esta sección se introduce el número $e \simeq 2{,}71828$; la función exponencial (y sus propiedades) y la función logarítmica (y sus propiedades) con sus respectivas derivadas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Conocer y manejar las leyes de los exponentes
2. Conocer y graficar las funciones logarítmica y exponencial para distintas bases
3. Conocer y manejar las leyes de los logaritmos
4. Derivar funciones que involucren logaritmos y exponenciales

Referencia: De la página 374 a la página 379. Ejercicios del 1 al 50.

7.2 Logaritmos naturales: $y = \ln x$

Comentario:

En la introducción se hizo un enfoque informal de esta función, desde un punto de vista pre-cálculo matemático.

Ahora se estudiará la función logarítmica desde el punto de vista del cálculo, definiéndola como una integral y deduciendo sus propiedades, continuidad y crecimiento para $x > 0$, así como el comportamiento de esta función en los extremos de su dominio.

Objetivo:

Que el estudiante sea capaz de conocer la definición del logaritmo natural, su gráfico y propiedades.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Definición de la función logaritmo natural
2. Las leyes de logaritmos
3. Gráfico de la función $\ln x$
4. Derivar funciones que involucren logaritmos
5. Calcular integrales del tipo $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$ o reducibles a ella
6. Graficar funciones que involucren logaritmos

Referencia:

De la página 379 a la página 387. Ejercicios del 1 al 56.

7.3 La función exponencial

Comentario:

Se introduce la función exponencial natural como la inversa de la función ln x. Se demuestra su derivada y su integral. Luego se estudia su comportamiento en los extremos de su dominio para graficar funciones que involucren funciones exponenciales.

Concluye la sección estudiando e como un límite.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz además de conocer y graficar las leyes de exponentes, conocer y graficar la función exponencial; calcular derivadas e integrales que involucren dicha función

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Definir la función exponencial natural
2. Las leyes de exponentes
3. Graficar funciones que involucren la exponencial natural
4. Derivar funciones que involucren la exponencial natural
5. Calcular integrales que involucren la exponencial natural
6. Calcular límites de la forma: $\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

Referencia:

De la página 389 a la página 395. Ejercicios del 1 al 57.

7.4 Funciones exponencial y logarítmica generales

Comentario:

En esta sección se estudia la función exponencial y logarítmica para cualquier base $0 < a \neq 1$, así como la función potencia general: $f(x) = x^r$ para $x > 0$.

Termina la sección mostrándonos las benevolencias de la diferenciación logarítmica para expresiones complicadas.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de derivar e integrar expresiones que involucren funciones exponencial y logarítmica en cualquier base, así como la función potencia general. Derivar expresiones usando diferenciación logarítmica.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Derivar e integrar expresiones que contengan las funciones exponencial y logarítmica generales
2. Usar diferenciación logarítmica

Referencia:

De la página 396 a la página 401. Ejercicios del 1 al 52.

CAPITULO 8

Tiempo asignado: 1 semanas

Funciones Trigonométrica (e Hiperbólicas)

8.1 Introducción:

Comentario:

En este capítulo se estudian unas funciones trascendentes de caracter elemental llamadas trigonométricas por sus múltiples aplicaciones a la ciencia así como base de ciertos métodos importantes de integración.

La amplitud, período, desface, dominio, rango de las funciones trigonométricas y sus inversas debe ser del conocimiento del alumno (estudiado en MA0125) así como las relaciones entre ellas.

Aquí veremos las funciones trigonométricas desde el punto de vista del cálculo diferencial e integral.

Referencia:

Página 434 del texto.

8.2 Derivadas e integrales de las funciones trigonométricas

Comentario:

En las secciones 3.6 y 3.7 se estudió las derivadas de las funciones seno y coseno usando la definición y usando la regla del cociente se calculó las derivadas de las 4 restantes, así como la combinación de éstas con la regla de la cadena.

Usando estos resultados se obtiene la tabla mínima para integrar algunas fracciones trigonométricas y también se necesitan algunos trucos para obtener otras.

Hay que hacer énfasis en la necesidad de memorizar tanto la tabla de integrales como de las identidades trigonométricas para un buen resultado.

Objetivo:

Aparte de que debe saber las derivadas de las funciones trigonométricas combinada con la regla de la cadena, debe saber calcular integrales de funciones trigonométricas, sin olvidar que algunos casos especiales (como potencias y combinaciones de ellas) se retoman en la sección 9.3.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular integrales y derivadas que involucren funciones trigonométricas
2. Aplicar las reglas de derivación y regla de la cadena
3. Transformar integrales haciendo uso de identidades trigonométricas u otros artificios matemáticos para llegar a la tabla.

Referencia:

De la página 434 a la página 438. Ejercicios del 1 al 60.

8.3 Funciones trigonométricas inversas

Comentario:

En esta sección se definen las funciones trigonométricas inversas, sus derivadas e integrales.

Al ser sus derivadas funciones algebraicas, resultan útiles para el cálculo de integrales por medio del teorema fundamental.

Al no ser las funciones trigonométricas uno-uno, carecen de funciones inversas. Las funciones aquí definidas son inversas del subconjunto de funciones trigonométricas. El dominio de estos subconjuntos se elige de manera arbitraria, pero con dos criterios: la función resultante tiene que ser uno-uno y su inversa tiene que tener una fórmula única para su derivación.

Las fórmulas para las derivadas se obtienen haciendo uso de la relación existente entre la derivada de una función uno-uno y la de su inversa.

Las fórmulas para las integrales se obtienen haciendo uso del teorema fundamental.

Objetivo:

El objetivo fundamental es poder definir, graficar y derivar las funciones trigonométricas inversas así como poder calcular integrales cuyo resultado sean dichas funciones.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Definir las funciones trigonométricas inversas
2. Dominio y rango de cada una de ellas
3. Graficar las funciones trigonométricas inversas
4. Derivar estas funciones
5. Calcular integrales cuyos resultados sean funciones trigonométricas inversas (llegando a ello por sustitución de otro artificio matemático).

Referencia: De la página 439 a la página 447. Ejercicios del 1 al 55.

CAPITULO 9

Tiempo asignado: 3 semanas

Técnicas de Integración

9.1 Introducción:

Comentario:

Este capítulo desarrolla técnicas para hallar primitivas. Las técnicas más generales del capítulo son: el método de sustitución, integración por partes, integración de potencias de funciones trigonométricas, sustitución trigonométrica, integración de funciones racionales de seno y coseno, etc.

Es bueno recordar que la integración no es un proceso rutinario como lo es la diferenciación. En realidad, encontrar antiderivadas es un arte que depende de la experiencia y de la práctica. No obstante, existen ciertas técnicas cuyo uso sistemático puede reducir sustancialmente nuestra dependencia en la casualidad y en la sola intuición y éstas deben aplicarse, mientras no desarrolle la habilidad, en el orden en que son estudiadas.

Referencia:

Página 472 del texto.

9.2 Tablas de integrales y sustituciones simples

Comentario:

Desarrollar la técnica de integración por sustitución, que es la técnica fundamental para la obtención de antiderivadas, está basado en la regla de la cadena y en la lista de integrales inmediatas (ver tabla 9.1, pág. 473).

Para aplicar con éxito esta técnica, hace falta una cierta facilidad para reconocer y relacionarla con una de las formas tipo en una función integrando dado una vez superado este caso, queda el comienzo expédito para una sustitución formal o para ajustes del integrando insertando constantes, de modo que le sea aplicable la regla de la cadena.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de recordar una tabla mínima de integrales y de aplicar el método de sustitución para transformar el integrando en alguna de la tabla.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Escribir de memoria las integrales de la tabla 9.1.
2. Integrar por el método de sustitución.

Referncia:

De la página 472 a la página 475. Ejercicios del 1 al 45.

9.3 Integrales trigonométricas

Comentario:

Esta sección se ocupa del método para integrar expresiones que contienen funciones trigonométricas en su integrando.

Es bueno hacer énfasis en la necesidad de memorizar algunas identidades trigonométricas, así como las integrales inmediatas de algunas de estas funciones y sus derivadas.

Objetivo:

Estudiar como calcular integrales que contienen funciones como $\operatorname{sen}^m x$; $\cos^n x$; $\tan^m x$; $\sec^n x$; $\cot^m x$, $\operatorname{cosec}^n x$ y algunos productos de éstas en sus integrandos. El problema se subdivide en casos que dependen de la pariedad de m y n.

Lo que el estudiante debe saber:

1. Aplicar el método de sustitución a las integrales de funciones trigonométricas.

2. Transformar el integrando haciendo uso de identidades trigonométricas.

3. Integrar funciones trigonométricas y productos de potencias de éstas.

Referencia:

De la página 475 a la página 480. Ejercicios del 1 al 35.

9.4 Integración por partes:

Comentario:

Esta sección explica el método de integración por partes, método basado en la regla de derivación para un producto de funciones.

Se consideran casos que requieren sucesivas integraciones por partes así como debe aplicarse este método a integrales definidas. Se incluyen ejemplos en los que al aplicar la regla vuelve a aparecer la integral I de origen, lo que permite despejar I en la igualdad resultante.

Para adquirir práctica en la integración por partes, es conveniente ordenar el trabajo en forma sistemática y explicar la problemática de escoger bien el u y el dv para integrar $\int u\,dv$.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de integrar por el método de integración por partes.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Utilizar el método de integración por partes
2. Para ello es necesario identificar bien u, el dv en la integral $\int u\,dv$
3. Usar los diferenciales para calcular el du el v.

Referencia:

De la página 480 a la página 485. Ejercicios del 1 al 35.

9.5 Sustitución Trigonométrica:

Comentario:

Esta sección se ocupa de integrales que contiene en sus integrandos expresiones algebraicas tales como: $(a^2 - u^2)^n$, $(u^2 - a^2)^n$ y $(a^2 - u^2)^n$.

Como su nombre lo indica, es sustituir la variable u por una función trigonométrica, por lo que es bueno hacer énfasis en la necesidad d de memorizar algunas identidades trigonométricas, así como las integrales inmediatas de algunas funciones trigonométricas y sus inversas (sin olvidarnos del dominio).

Puesto que el paso final consiste en expresar la respuesta en la variable original, es necesario el dominio del triángulo rectángulo que nos relaciona u con θ. (no se harán sustituciones con trigonométricas hiperbólicas).

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de integrar por sustitución trigonométrica.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Hacer sustituciones trigonométricas convenientes en integrandos que aparezcan expresiones como $(a^2 - u^2)^n$; $(u^2 - a^2)^n$ o $(a^2-u^2)^n$
2. Dominar las identidades trigonométricas básicas.
3. Dominar las inversas trigonométricas y sus dominios.
4. Dominar el triángulo rectángulo que nos relaciona el ángulo θ con la variable original u para dar la respuesta.

Referencia:

De la página 486 a la página 491. Ejercicios del 1 al 35.

9.6 Integrales que contienen polinomios cuadráticos

Comentario:

El objetivo de esta sección es estudiar algunas técnicas para integrar ciertas funciones racionales, en particular, cuando el integrando contiene una raíz cuadrada o potencia negativa de un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ el cual suponemos sea irreducible y que luego de algún trabajo algebraico nos permita utilizar un método de sustitución adecuado.

Objetivo:

Calcular integrales cuyo integrando contenga una raíz cuadrada o potencia negativa de un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ mediante el proceso de completar cuadrado, transformándose en una rama o en una diferencia de cuadrados, para luego usar el método de sustitución trigonométrica.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Completar cuadrados
2. Aplicar el método de sustitución algebraico o trigonométrico a una función racional simple
3. Reconocer de memoria ciertas integrales inmediatas.
4. Separar integrales en otras más simples con el mismo denominador.

Referencia:

De la página 491 a la página 496. Ejercicios del 1 al 28.

9.7 Fracciones racionales y fracciones parciales

Comentario:

El objetivo de esta sección es estudiar los métodos de integración de funciones racionales usando fracciones parciales.

Este método se extiende a casos en que el numerador es de grado igual o mayor al grado del denominador, en cuyo caso se dice que la fracción racional no es "propia", por lo cual debe efectuarse la división hasta obtener un resto con grado menor que el grado del denominador.

El resto de la sección está dedicado al método de las fracciones parciales. Se describen las formas de descomposición, pero no se dan aquí los teoremas que establecen la existencia de dichas formas. Estos pueden encontrarse en algunos libros de álgebra, como por ejemplo: Theory of Equations de C. C. Mac Duffee, New York, Wiley, 1954.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de calcular cualquier integral cuyo integrando sea una función racional.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Dividir polinomios de modo que el resto tenga grado menor que el grado del divisor

2. Descomponer funciones racionales por el método de fracciones parciales

3. Integrar cada uno de los términos de la descomposición.

Referencia:

De la página 496 a la página 504. Ejercicios del 1 al 35.

9.8 Sustituciones Racionales:

Comentario:

Esta sección tiene por objetivo desarrollar la técnica de integrar funciones racionales mediante sustituciones algebraicas o trigonométricas, transformando primero el integrando a una función racional de u, que ya es posible integrar mediante fracciones parciales u otros métodos.

Objetivo:

Que el estudiante sea capaz de calcular integrales cuyo integrando involucre radicales en el numerador y/o en el denominador, así como funciones racionales de seno y coseno.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular integrales usando sustituciones algebraicas o trigonométricas transformando el integrando en una función racional de variable u.

2. Calcular integrales de funciones racionales de seno y coseno mediante la sustitución $u = \tan \frac{\theta}{2}$

Referencia:

De la página 505 a la página 509. Ejercicios del 1 al 20.