

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática

Programa del curso
MA0304 Álgebra y Análisis II

1 Presentación

Este es el tercer curso de Matemática a nivel universitario, para estudiantes de Enseñanza de la Matemática. En el curso anterior se hizo una pequeña introducción a las ideas de la teoría de conjuntos y relaciones binarias, y se utilizaron estas ideas en el estudio minucioso de los números naturales, enteros y racionales. En este curso se hace lo mismo con los números reales, y se analizan conceptos de importancia como el de infinitud, numerabilidad, completitud y densidad. Además, se estudian temas relacionados, como las sucesiones numéricas, expansiones decimales, y algunas funciones elementales de gran importancia.

2 Objetivos

2.1 General

- Estudiar los números reales desde diferentes puntos de vista, analizando sus propiedades algebraicas y analíticas, y los diferentes enfoques a la hora de introducirlos.

2.2 Específicos

1. Entender la diferencia entre los conceptos de conjunto infinito y numerable. Estudiar el uso que se hace de estos conceptos en secundaria.
2. Entender los conceptos de densidad y completitud en conjuntos numéricos, y estudiar el manejo que a nivel de enseñanza media se hace de ellos.
3. Entender la necesidad de construir o axiomatizar el sistema de los números reales, y estudiar las diferentes formas de hacerlo.
4. Reconocer la utilidad de la completitud de \mathbb{R} en temas como la potenciación y las expansiones decimales.
5. Entender conceptos como el de sucesión numérica, y su utilidad en la construcción de funciones trascendentes.
6. Ser capaz de trabajar con sucesiones y series numéricas a un nivel elemental, utilizando las propiedades básicas y calculando límites y sumas infinitas.
7. Utilizar correctamente los criterios elementales para determinar convergencia de sucesiones y series numéricas.

Contenidos

Los Números Reales

Incompletitud de \mathbb{Q} . El paso de \mathbb{Q} a \mathbb{R} . Densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} .

- El axioma del Extremo Superior.
- 3. Valor absoluto, parte entera. Existencia de raíces.

2 Sucesiones y Series Numéricas

- 1. Sumatorias y la fórmula del binomio. Desigualdades del tipo Bernoulli.
- 2. Concepto intuitivo de sucesión, definición rigurosa, convergencia. Cálculo de límites de sucesiones.
- 3. Sucesiones recurrentes. Teorema de Weierstrass.
- 4. Existencia de raíces vía sucesiones.
- 5. Series geométricas y telescópicas. Series de términos positivos.
- 6. Series telescópicas. Aproximación de sumas infinitas.

3.3 Expansiones

- 1. Expansiones de números racionales. Números con expansión finita.
- 2. Expansiones de números reales en base arbitraria.
- 3. Expansiones decimales, binarias, ternarias.
- 4. Expansiones de números irracionales.

3.4 Equipotencia, conjuntos infinitos y numerables

- 1. La relación de equipotencia de conjuntos. Conjuntos finitos e infinitos.
- 2. Conjuntos numerables y no numerables. Numerabilidad de \mathbb{Q} . No numerabilidad de \mathbb{R} .
- 3. Teorema de Shauder-Bernstein.

Transcendentes

1. Construcción de la función exponencial vía sucesiones.
2. El logaritmo, el número e , logaritmo natural. Propiedades.
3. El número e como suma infinita. Irracionalidad del número e .
4. Construcción de funciones trigonométricas.
5. Ejemplos relacionados con problemas de secundaria.

4. Evaluación

La evaluación contemplará 4 exámenes parciales. El primero y el tercero con un valor del 20% cada uno y los restantes de un 25% cada uno. El cronograma para estas pruebas es el siguiente:

- I Examen Parcial Jueves 1 Abril 9:00 AM
- II Examen Parcial Jueves 6 de Mayo 9:00 AM
- III Examen Parcial Jueves 3 de Junio 9:00 AM
- IV Examen Parcial Jueves 1 de Julio 9:00 AM

El 10% final se evaluará, a partir de la aplicación de un conjunto de exámenes cortos.

Si el estudiante obtiene una nota mayor o igual a 7.0 gana el curso; si su nota es 6.0 o 6.5 tiene derecho a realizar examen de ampliación el jueves 8 de julio a las 9:00 AM. Finalmente si la calificación es menor a 6.0 pierde el curso.

5. Bibliografía

1. Bartle, R.G & D.R. Sherbert *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*. Limusa, 1996.
2. Courant, R. & F. John. *Introduction to Calculus and Analysis*. Vol.I Springer-Verlag, N.Y. 1989.
3. Eves, H. *An Introduction to the History of Mathematics*. 3^{era} ed. N.Y 1961.
4. Halmos, P.R. *Naive Set Theory*. Springer-Verlag, N.Y 1974.
5. Pedrick, G. *A first course in analysis*. Springer-Verlag, N.Y.1994
6. Pownall, M.W. *Real Analysis. A first course with foundations*. WCB Publishers, 1994.
7. Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 2^{da} edición, 1996.
8. Sprecher, D.A. *Elements of Real Analysis*. Dover Pub. Inc. New York, 1970.