Carlos Bonilla

I - 2004

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática

Programa del curso
MA0304 Algebra y Análisis II

1 Presentación

Este es el tercer curso de Matemática a nivel universitario, para estudiantes de Enseñanza de la Matemática. En el curso anterior se hizo una pequeña introducción a las ideas de la teoría de conjuntos y relaciones binarias, y se utilizaron estas ideas en el estudio minusioso de los números naturales, enteros y racionales. En este curso se hace lo mismo con los números reales, y se analizan conceptos de importancia como el de infinitud, numerabilidad, completitud y densidad. Además, se estudian temas relacionados, como las sucesiones numéricas, expansiones decimales, y algunas funciones elementales de gran importancia.

2 Objetivos

2.1 General

- Estudiar los números reales desde diferentes puntos de vista, analizando sus propiedades algebraicas y analíticas, y los diferentes enfoques a la hora de introducirlos.

2.2 Específicos

1. Entender la diferencia entre los conceptos de conjunto infinito y numerable. Estudiar el uso que se hace de estos conceptos en secundaria.
2. Entender los conceptos de densidad y completitud en conjuntos numéricos, y estudiar el manejo que a nivel de enseñanza media se hace de ellos.
3. Entender la necesidad de construir o axiomatizar el sistema de los números reales, y estudiar las diferentes formas de hacerlo.
4. Reconocer la utilidad de la completitud de $\mathbb{R}$ en temas como la potenciación y las expansiones decimales.
5. Entender conceptos como el de sucesión numérica, y su utilidad en la construcción de funciones trascendentes.
6. Ser capaz de trabajar con sucesiones y series numéricas a un nivel elemental, utilizando las propiedades básicas y calculando límites y sumas infinias.
7. Utilizar correctamente los criterios elementales para determinar convergencia de sucesiones y series numéricas.

3 Contenidos

3.1 Los Números Reales

1. Incompletitud de $\mathbb{Q}$. El paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$. Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
2. El axioma del Extremo Superior.
3. Valor absoluto, parte entera. Existencia de raíces.

3.2 Sucesiones y Series Numéricas

1. Sumatorias y la fórmula del binomio. Desigualdades del tipo Bernoulli.
2. Concepto intuitivo de sucesión, definición rigurosa, convergencia. Cálculo de límites de sucesiones.
3. Sucesiones recurrentes. Teorema de Weierstrass.
4. Existencia de raíces vía sucesiones.
5. Series geométricas y telescópicas. Series de términos positivos.
6. Series telescópicas. Aproximación de sumas infinitas.

3.3 Expansiones

1. Expansiones de números racionales. Números con expansión finita.
2. Expansiones de números reales en base arbitraria.
3. Expansiones decimales, binarias, ternarias.
4. Expansiones de números irracionales.

3.4 Equipotencia, conjuntos infinitos y numerables

1. La relación de equipotencia de conjuntos. Conjuntos finitos e infinitos.
2. Conjuntos numerables y no numerables. Numerabilidad de $\mathbb{Q}$. No numerabilidad de $\mathbb{R}$.
3. Teorema de Shauder-Bernstein.

3.5 Funciones trascendentes

1. Construcción de la función exponencial vía sucesiones.
2. El logaritmo, el número e, logaritmo natural. Propiedades.
3. El número e como suma infinita. Irracionalidad del número e.
4. Construcción de funciones trigonométricas.
5. Ejemplos relacionados con problemas de secundaria.

4. Evaluación

La evaluación contemplará 4 exámenes parciales. El primero y el tercero con un valor del 20% cada uno y los restantes de un 25% cada uno. El cronograma para estas pruebas es el siguiente:

- I Examen Parcial — Jueves 1 Abril 9:00 AM
- II Examen Parcial — Jueves 6 de Mayo 9:00 AM
- III Examen Parcial — Jueves 3 de Junio 9:00 AM
- IV Examen Parcial — Jueves 1 de Julio 9:00 AM

El 10% final se evaluará, a partir de la aplicación de un conjunto de exámenes cortos.

Si el estudiante obtiene una nota mayor o igual a 7.0 gana el curso; si su nota es 6.0 o 6.5 tiene derecho a realizar examen de ampliación el jueves 8 de julio a las 9:00 AM. Finalmente si la calificación es menor a 6.0 pierde el curso.

5. Bibliografía

1. Bartle, R.G & D.R. Sherbert *Introducción al Análisis Matemático de una Variable.* Limusa, 1996.
2. Courant, R. & F. John. *Introduction to Calculus and Analysis.* Vol.I Springer-Verlag, N.Y. 1989.
3. Eves, H. *An Introduction to the History of Mathematics.* 3$^{\text{era}}$ ed. N.Y 1961.
4. Halmos, P.R. *Naive Set Theory.* Springer-Verlag, N.Y 1974.
5. Pedrick, G. *A first course in analysis.* Springer-Verlag, N.Y.1994
6. Pownall, M.W. *Real Analysis. A first course with foundations.* WCB Publishers, 1994.
7. Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 2$^{\text{da}}$ edición, 1996.
8. Sprecher, D.A. *Elements of Real Analysis.* Dover Pub. Inc. New York, 1970.