Universidad de Costa Rica Profesor: Carlos Bonilla Flores
Sede de Occidente
Sección de Matemática

Programa del curso
MA0304 Álgebra y Análisis II

1. **Presentación**
Este es el tercer curso de Matemática a nivel universitario, para estudiantes de Enseñanza de la Matemática. En el curso anterior se hizo una pequeña introducción a las ideas de la teoría de conjuntos y relaciones binarias y se utilizaron estas ideas en el estudio minucioso de los números naturales, enteros y racionales. En este curso se hace lo mismo con los números reales, y se analizan conceptos de importancia como el de infinitud, numerabilidad, completitud y densidad. Además, se estudian temas relacionados, como las sucesiones numéricas, expansiones decimales, y algunas funciones elementales de gran importancia.

2. **Objetivos**

2.1 General
- Estudiar los números reales desde diferentes puntos de vista, analizando sus propiedades algebraicas y analíticas, y los diferentes enfoques a la hora de introducirlos.

2.2 Específicos
- Entender la diferencia entre los conceptos de conjunto infinito y numerable. Estudiar el uso que se hace de estos conceptos en secundaria.
- Entender los conceptos de densidad y completitud en conjuntos numéricos, y estudiar el manejo que a nivel de enseñanza media se hace de ellos.
- Entender la necesidad de construir o axiomatizar el sistema de los números reales, y estudiar las diferentes formas de hacerlo.
- Reconocer la utilidad de la completitud de R en temas como la potenciación y las expansiones decimales.
- Entender conceptos como el de sucesión numérica, y su utilidad en la construcción de funciones trascendentes.
- Ser capaz de trabajar con sucesiones y series numéricas a un nivel elemental, utilizando las propiedades básicas y calculando límites y sumas infinitas.
- Utilizar correctamente los criterios elementales para determinar la convergencia de sucesiones y series numéricas.

3. **Contenidos**

3.1 Los números reales
1. Incompletitud de Q. El paso de Q a R. Densidad de Q en R.
2. El axioma del extremo superior.
3. Valor absoluto, parte entera. Existencia de raíces.

3.2 Sucesiones y series numéricas
1. Sumatoria y la fórmula del binomio. Desigualdades del tipo Bernoulli.
2. Concepto intuitivo de sucesión, definición rigurosa, convergencia. Calculo de límites de sucesiones.
3. Sucesiones recurrentes. Teorema de Weierstrass.
4. Existencia de raíces vía secesiones.
5. Series geométricas y telescópicas. Series de términos positivos.
6. Series telescópicas. Aproximación de sumas infinitas.

3.3 Expansiones
1. Expansiones de números racionales. Números con expansión finita.
2. Expansiones de números reales en base arbitraria.
3. Expansiones decimales, binarias ternarias.
4. expansiones de números irracionales.

3.4 Equipotencia, conjuntos infinitos y numerables
1. La relación de equipotencia de conjuntos. Conjuntos infinitos y finitos.
2. Conjuntos numerables y no numerables. Numerabilidad de Q. No numerabilidad de R.
3. Teorema de Shauder – Bernstein.

3.5 Funciones trascendentes
1. Construcción de la función exponencial vía sucesiones.
2. El logaritmo, el número e, logaritmo natural. Propiedades.
3. El número e como suma infinita. Irracionalidad del número e.
4. Construcción de funciones trigonométricas.
5. Ejemplos relacionados con problemas de secundaria.

4. **Evaluación**
La evaluación contemplará 3 exámenes parciales. El primero tendrá un valor de 30 %, el segundo y tercero un valor de 35 % cada uno. El cronograma de estas pruebas es el siguiente.
- I Examen Parcial semana 15 del 11 al 15 de abril

- II Examen Parcial semana 21 del 23 al 27 de mayo
- III Examen Parcial semana 26 del 27 al 30 de junio

Si el estudiante obtiene una nota mayor o igual 7.0 gana el curso; si su nota es 6.0 ó 6.5 tiene derecho a realizar examen de ampliación el día

5. Bibliografía

1. Bartle, R.G &D.R. Sherbert "Introducción al análisis matemático de una variable". Limusa, 1966
2. Courant, R. & F. John. Introduction to calculus and Analysis. Vol 1 Springer – Verlag, N. Y. 1989
3. Eves, H. An introduction to the history of mathematics. 3ª ed. N. Y. 1961
4. Halmos, P. R. Naïve set theory. Springer – Verlag, N. Y. 1994
5. pedrick, G. A. A first course in analysis. Springer – Verlag, N. Y. 1994
6. Pownall, M.W. Real Analysis. A first course with foundations. WCB Publishers, 1994
7. Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis. Mc Graw – Hill, 2ª ed, 1996
8. Sprecher, D.A. Elements of real analysis. Dover Pub. Inc. N.Y. 1970

"La verdad nos hace libres"