

Programa del curso: MA-0304  
Álgebra y Análisis II  
I Semestre 2006

### 1. Presentación

Este es el tercer curso de Matemática a nivel universitario, para estudiantes de Enseñanza de la Matemática. En el curso anterior se hizo una pequeña introducción a las ideas de la teoría de conjuntos y relaciones binarias, y se utilizaron estas ideas en el estudio minucioso de los números naturales, enteros y racionales. En este curso se hace lo mismo con los números reales, y se analizan conceptos de importancia como el de infinitud, numerabilidad, completitud y densidad. Además, se estudian temas relacionados, como las sucesiones numéricas, expansiones decimales, y algunas funciones elementales de gran importancia.

### 2. Objetivos

- **General:** Estudiar los números reales desde diferentes puntos de vista, analizando sus propiedades algebraicas y analíticas, y los diferentes enfoques a la hora de introducirlos.
- **Específicos:**
  - a. Entender la diferencia entre los conceptos de conjunto infinito y numerable. Estudiar el uso que se hace de estos conceptos en secundaria.
  - b. Entender los conceptos de densidad y completitud en conjuntos numéricos, y estudiar el manejo que a nivel de enseñanza media se hace de ellos.
  - c. Entender la necesidad de construir o axiomatizar el sistema de los números reales, y estudiar las diferentes formas de hacerlo.
  - d. Reconocer la utilidad de la completitud de  $\mathbb{R}$  en temas como la potenciación y las expansiones decimales.
  - e. Entender conceptos como el de sucesión numérica, y su utilidad en la construcción de funciones trascendentes.
  - f. Ser capaz de trabajar con sucesiones y series numéricas a un nivel elemental, utilizando las propiedades básicas y calculando límites y sumas infinitas.
  - g. Utilizar correctamente los criterios elementales para determinar convergencia de sucesiones y series numéricas.

### 3. Contenidos

- **Los Números Reales**
  - a. Incompletitud de  $\mathbb{Q}$ . El paso de  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}$ . Densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ .
  - b. El axioma del Extremo Superior.
  - c. Valor absoluto, parte entera. Existencia de raíces.
- **Sucesiones y Series Numéricas**
  - a. Sumatorias y la fórmula del binomio. Desigualdades del tipo Bernoulli.
  - b. Concepto intuitivo de sucesión, definición rigurosa, convergencia. Cálculo de límites de sucesiones.
  - c. Sucesiones recurrentes. Teorema de Weierstrass.
  - d. Existencia de raíces vía sucesiones.
  - e. Series geométricas y telescópicas. Series de términos positivos.
  - f. Series telescópicas. Aproximación de sumas infinitas.
- **Expansiones**
  - a. Expansiones de números racionales. Números con expansión finita.
  - b. Expansiones de números reales en base arbitraria.
  - c. Expansiones decimales, binarias, ternarias.
  - d. Expansiones de números irracionales.
- **Equipolencia, conjuntos infinitos y numerables**
  - a. La relación de equipolencia de conjuntos. Conjuntos finitos e infinitos.
  - b. Conjuntos numerables y no numerables. Numerabilidad de  $\mathbb{Q}$ . No numerabilidad de  $\mathbb{R}$ .
  - c. Teorema de Shauder-Berstein.
- **Funciones trascendentes**
  - a. Construcción de la función exponencial vía sucesiones.
  - b. El logaritmo, el número e, logaritmo natural. Propiedades.
  - c. El número e como suma infinita. Irracionalidad del número e.
  - d. Construcción de funciones trigonométricas.
  - e. Ejemplos relacionados con problemas de secundaria.

