



Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

I Ciclo 2015
4 créditos
Requisito MA0213

MA0313 Matemática para Economía y Estadística II

Carta al estudiante

1 Presentación

Este curso es de 5 horas semanales, con un valor de cuatro créditos y de modalidad semestral. Puede catalogarse como un segundo curso de cálculo, en el que se exploran las ideas básicas del análisis matemático que se extiende a varias variables en algunos casos y se hace una introducción a los conceptos y herramientas del álgebra lineal, fundamentales en cualquier campo de estudio. Este documento le brinda información general sobre los principales aspectos del curso que usted necesita para un desempeño adecuado en él. Es su responsabilidad leer y estar al tanto de toda la información que aquí se le suministra.

Es importante recordar que un crédito es “la unidad valorativa del trabajo del estudiante, equivalente a tres horas semanales de su trabajo, durante quince semanas, aplicadas a una actividad que ha sido supervisada, evaluada y aprobada por el profesor” (Reglamento de Régimen Académico). Además, el (la) estudiante debe tener presente que el documento que indica las normativas de un curso es el Reglamento de Régimen Académico, el cual puede ser accesado desde la página de la Universidad de Costa Rica.

2 Objetivos

2.1 Objetivo General

Usar el cálculo integral en una variable como herramienta en la solución de problemas, conocer y aplicar los conceptos básicos del álgebra lineal y del cálculo diferencial en varias variables.

2.2 Objetivos específicos

- Aproximar valores de funciones, soluciones de ecuaciones e integrales definidas mediante polinomios de Taylor y obtener cotas para las errores de aproximación.
- Aplicar los desarrollos limitados en el cálculo de límites y determinación de la convergencia de una integral impropia.
- Utilizar el principio de inducción matemática para demostrar proposiciones sobre números naturales.
- Determinar propiedades básicas de las sucesiones numéricas.

- Calcular el valor de convergencia de series numéricas particulares.
- Determinar si una serie numérica es convergente.
- Hallar la forma explícita, el intervalo y el radio de convergencia de una serie de potencias.
- Calcular la solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Aplicar teoremas del Álgebra Lineal en el cálculo matricial.
- Realizar cálculos básicos de geometría vectorial.
- Determinar si un conjunto es un subespacio vectorial, y calcular su base, las coordenadas de los vectores que lo conforman y la base del complemento ortogonal.
- Construir bases ortonormales.
- Aplicar la regla de la cadena en funciones de varias variables y transformar expresiones mediante cambios de variables.
- Determinar y clasificar los extremos de funciones de varias variables.

2.3 Objetivos de aprendizaje

- Aproximar funciones por medio de polinomios de Taylor.
- Calcular y acotar errores de aproximaciones hechas con polinomios de Taylor.
- Aplicar el Teorema de Taylor para aproximar el valor de integrales definidas y resolver ecuaciones, además de calcular una cota para el error de la aproximación.
- Estudiar los desarrollos limitados clásicos y utilizar la notación “o” de Landau.
- Generalizar el concepto de desarrollo limitado.
- Aplicar los desarrollos limitados al cálculo de límites, integrales impropias y series numéricas.
- Utilizar el principio de Inducción matemática para probar proposiciones sobre números naturales.
- Definir el concepto de sucesión numérica, estudiando los diferentes tipos.
- Calcular el límite de sucesiones, usar la definición de límite y la definición de sucesión convergente.
- Estudiar diferentes criterios de convergencia de sucesiones.
- Estudiar la convergencia de sucesiones y series numéricas utilizando la fórmula de Stirling.
- Calcular el valor de convergencia de una sucesión utilizando la Fórmula de Darboux.

- Definir el concepto de serie numérica, serie convergente y divergente.
- Calcular valores de convergencia de series geométricas y telescópicas.
- Determinar la naturaleza de series utilizando diferentes criterios.
- Calcular cotas para el error de aproximar series alternadas.
- Aplicar la fórmula de Stirling para determinar la convergencia de series numéricas y sucesiones.
- Calcular radio e intervalo de convergencia de una serie de potencias.
- Calcular en forma explícita la suma de una serie de potencias.
- Integrar y derivar término a término una serie de potencias, determinar su intervalo de convergencia y aplicar el teorema de los puntos extremos de Abel.
- Evaluar series de potencias para determinar el valor de convergencia de series numéricas.
- Calcular series de Taylor y de Maclaurin.
- Escribir sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial.
- Aplicar operaciones elementales para reducir matrices.
- Calcular la solución de sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneos mediante la reducción de matrices.
- Determinar la solución de sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneos dependientes de parámetros.
- Determinar el rango de una matriz y usarlo para clasificar sistemas de ecuaciones lineales.
- Calcular operaciones con matrices y resolver ecuaciones matriciales.
- Determinar si una matriz es invertible y calcular su inversa.
- Determinar si un conjunto de vectores es linealmente independientes.
- Calcular determinantes por cofactores, usando propiedades y mediante uso de operaciones de filas.
- Calcular la norma de un vector y el ángulo entre dos vectores.
- Calcular el binormal a dos vectores usando el producto cruz.
- Determinar las ecuaciones vectoriales, simétricas y paramétricas de rectas en el espacio.
- Calcular las ecuación normal y vectorial de un plano.
- Calcular distancias entre un plano y un punto, dos planos y entre dos rectas.

- Definir espacios vectoriales y subespacios vectoriales. Estudiar espacios de matrices, espacios de polinomios y \mathbb{R}^n .
- Determinar si un subconjunto es un subespacio de un espacio vectorial V .
- Determinar bases para espacios vectoriales.
- Calcular las coordenadas de un vector en una base.
- Calcular la dimensión de un espacio vectorial y de un subespacio.
- Calcular el complemento ortogonal de un subespacio vectorial.
- Calcular la proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio.
- Aplicar el método de Gram-Schmidt para construir bases ortonormales.
- Calcular derivadas parciales de funciones de varias variables, cálculo de el gradiente.
- Aplicar la regla de la cadena en funciones de varias variables y transformar expresiones mediante cambios de variables.
- Determinar y clasificar los extremos de funciones de varias variables.

3 Contenidos

3.1 Teorema de Taylor

- Aproximación local de una función elemental mediante un polinomio de Taylor.
- Expresión de una función elemental mediante la fórmula de Taylor de orden n en un vecindario de un punto, con resto de Lagrange.
- Uso de polinomios de Taylor para aproximar integrales definidas y soluciones de ecuaciones acotando el error correspondiente.
- Desarrollos limitados y notación “ o ” de Landau. Aplicación a integrales impropias y límites.
- Desarrollos generalizados.

3.2 Sucesiones y Series

- Propiedades del conjunto de los números naturales. Conjuntos finitos de números reales. Sumas finitas, operaciones con sumas finitas. Productos finitos. Principio de Inducción Matemática y aplicaciones.
- Conjuntos numerables de números reales, sucesiones numéricas, operaciones con sucesiones, límite de una sucesión, tipos de sucesiones. Teorema de intercalación. Criterios de convergencia de sucesiones. Sucesiones monótonas y acotadas. Teorema de Weierstrass. Fórmula de Stirling y fórmula de Darboux

- Series de números reales, series convergentes y divergentes. Término general y suma de una serie convergente. Operaciones con series. Criterios de convergencia de series.

3.3 Series de Potencias

- Definiciones básicas, término general, radio de convergencia, intervalo de convergencia, teorema de punto extremos de Abel, derivación e integración término a término.
- Series de Taylor y de Maclaurin.
- Cálculo explícito de la función de una serie de potencias.
- Cálculo de valores de convergencia de series numéricas usando series de potencias.

3.4 Álgebra lineal

- Solución de sistemas lineales. Eliminación gaussiana. Conjunto solución de un sistema lineal. Soluciones dependientes de uno, dos o tres parámetros.
- Álgebra de matrices, operaciones elementales por filas, rango de una matriz, matrices cuadradas, determinantes. Método de Cramer, matriz inversa.
- Espacios vectoriales, subespacios vectoriales, independencia lineal de vectores. Base y dimensión de un espacio vectorial, bases ortonormales, subespacios ortogonales. Proyección ortogonal y método de Gram-Schmidt. Rectas y planos. Espacios de Matrices y espacios de polinomios.
- Definición de un vector e interpretación geométrica. Magnitud de un vector, vectores canónicos, vector unitario álgebra de vectores, ángulo entre vectores. Producto escalar de vectores y producto cruz.

3.5 Cálculo en varias variables

- Funciones de dos y tres variables. Aspectos generales.
- Derivadas parciales de una función de dos y tres variables. Teorema de la función implícita.
- Diferencial total de una función de varias variables, gradiente y hessiana, regla de la cadena.
- Derivada direccional, derivada direccional máxima.
- Extremos de funciones sobre regiones abiertas. Criterios para extremos locales de funciones de dos variables.

4 Metodología y actividades para cumplir los objetivos

La metodología del curso consiste en exposiciones de los contenidos por parte de los profesores, las cuales abarcarán el fundamento teórico de los mismos y su aplicación en la resolución de ejercicios. Además, se brindarán espacios dentro de las clases para que los y las estudiantes resuelvan algunos ejercicios que el profesor considere pertinentes.

Como parte de las actividades para cumplir los objetivos del curso, los y las estudiantes deberán resolver los ejercicios de las prácticas proporcionadas por los profesores. Además, se realizarán una serie de quices, con el fin de incentivar el estudio de los contenidos de forma constante.

5 Evaluación

El curso consta de tres exámenes parciales cada uno con un valor de 30% y una serie de pruebas cortas cuyo promedio corresponderá al 10% de la nota de aprovechamiento (NA), la cual es calculada en una escala de 0 a 10. El curso se aprueba si la NA es mayor o igual a 7, según el artículo 25 del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil.

El promedio de las pruebas cortas se calculará eliminando la nota de la prueba corta con la calificación más baja.

Contenidos a evaluar

- I Parcial: De la semana 1 a la 4.
- II Parcial: De la semana 5 a la 10.
- III Parcial: De la semana 11 a la 16.

*Las fechas de los exámenes están en el cronograma.

6 Cronograma

- Semana 1 (9 al 13 de marzo): Aproximación local de una función elemental mediante un polinomio de Taylor. Expresión de una función elemental mediante la fórmula de Taylor de orden n en un vecindario de un punto, con resto de Lagrange.
- Semana 2 (16 al 20 de marzo): Uso de polinomios de Taylor para aproximar integrales definidas y soluciones de ecuaciones acotando el error correspondiente. Desarrollos limitados y notación “o” de Landau. Aplicación a integrales impropias y límites. Desarrollos generalizados.
- Semana 3 (23 al 27 de marzo): Principio de Inducción Matemática. Sucesiones numéricas, operaciones con sucesiones, límite de una sucesión, tipos de sucesiones.
- Semana Santa (30 de marzo al 3 de abril)
- Semana 4 (6 al 10 de abril): Sucesiones monótonas y acotadas. Fórmula de Stirling y fórmula de Darboux.

- Semana 5 (13 al 17 de abril):
 - Definiciones básicas, series telescópicas y geométricas. Criterios de convergencia: condición necesaria, Criterio del cociente de Cauchy, Raíz n-ésima, comparación, criterio del límite.
 - 15 de abril, 8:00 a.m.: **I Parcial.**
- Semana 6 (20 al 24 de abril): Criterios de convergencia: criterio de la integral, series alternadas, convergencia absoluta, condensación de Cauchy y de Raabe. Convergencia de series usando desarrollos limitados.
- Semana 7 (27 de abril al 1 de mayo):
 - Definiciones básicas, término general, radio de converdencia, intervalo de convergencia, teorema de punto extremos de Abel, derivación e integración término a término. Series de Taylor y de Maclaurin. Cálculo explícito de la función de una serie de potencias. Cálculo de valores de convergencia de series numéricas usando series de potencias.
 - 29 de abril, 8:00 a.m.: **Reposición I Parcial.**
- Semana 8 (4 al 8 de mayo): Solución de un sistema de ecuaciones lineales. Matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones. Sistemas homogéneos y no homogéneos, matrices aumentadas. Operaciones elementales de filas, forma escalonada reducida por filas. Método de Gauss- Jordan.
- Semana 9 (11 al 15 de mayo): Rango de una matriz. Sistemas de ecuaciones que dependen de uno o dos parámetros. Tipos de matrices, operaciones con matrices, transpuesta de una matriz. Matrices invertibles e inversa de una matriz. Ecuaciones matriciales.
- Semana 10 (18 al 22 de mayo): Dependencia e independencia lineal de vectores. Determinante de una matriz cuadrada, propiedades. Desarrollo por cofactores. Determinantes y operaciones elementales. Determinantes y matrices invertibles.
- Semana 11 (25 al 29 de mayo):
 - Producto escalar de vectores. Norma de un vector. Ángulos entre vectores. Producto cruz de vectores en \mathbb{R}^3 . Ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de rectas en \mathbb{R}^3 . Rectas paralelas y perpendiculares. Planos en \mathbb{R}^3 , ecuación vectorial y normal de un plano, hiperplanos. Distancia entre dos rectas, entre un punto y un plano, entre dos planos.
 - 27 de mayo, 8:00 a.m.: **II Parcial.**
- Semana 12 (1 al 5 de junio):
 - Definición de espacio vectorial, subespacios vectoriales. Ejemplos de espacios vectoriales, espacios de matrices, polinomios y funciones. Conjuntos generadores, bases y dimensión de un espacio vectorial. Coordenadas de un vector respecto a una base. Espacio generado por las filas y por las columnas de una matriz.

– 3 de junio, 8:00 a.m.: **Reposición II Parcial.**

- Semana 13 (8 al 12 de junio): Conjuntos de vectores ortogonales. Complemento ortogonal de un subespacio. Proyección ortogonal sobre un subespacio. Método de Gram-Schmidt para construcción de bases ortonormales.
- Semana 14 (15 al 19 de junio): Funciones de dos y tres variables. Derivadas parciales de una función de dos variables. Regla de la cadena, transformación de expresiones por medio de cambios de variables.
- Semana 15 (22 al 26 de junio): Criterios de primer orden para determinar puntos críticos. Condiciones de segundo orden, matriz Hessiana. Extremos sobre diferentes tipos de conjuntos. Extremos sobre conjuntos cerrados y acotados.
- Semana 16 (29 de junio al 3 de julio): Repaso.
- 6 de julio, 1:00 p.m.: **III Parcial.**
- 8 de julio, 1:00 p.m.: **Reposición III Parcial.**
- 15 de julio, 8:00 a.m.: **Ampliación.**

7 Varios

7.1 Material

La carta al estudiante, las listas de ejercicios y materiales complementarios estarán disponibles en la carpeta MA0313IC15 de la sección de matemática aplicada, en la dirección electrónica <http://claroline.emate.ucr.ac.cr/>.

7.2 Asistencia a clases

Los y las estudiantes no están obligados a asistir a las clases. Se debe tener presente que los quices y exámenes deben realizarse en el grupo matriculado, por lo cual el (la) estudiante es responsable de estar al tanto de las fechas de las evaluaciones.

7.3 Asistencia y ausencia a exámenes

- Las aulas de exámenes serán anunciadas en el enlace de claroline desarrollado para este curso.
- El estudiante tiene derecho a realizar una prueba de reposición según lo estipulado el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil en su artículo 24. Toda reposición debe justificarla haciendo entrega de la documentación correspondiente en el casillero del COORDINADOR, y enviándole un correo electrónico indicando la entrega de la misma.
- Las pruebas cortas no se reponen.

- Todo estudiante debe presentar identificación válida para tener derecho a realizar los exámenes. Después de 30 minutos de iniciada una prueba ningún estudiante puede ingresar al aula.

7.4 Coordinación

EL coordinador del curso es el Prof. Luis Rojas Torres, correo: luismiguel.rojas@ucr.ac.cr, teléfono de oficina: 25115445 y casillero: 135.

7.5 Horas de consulta y grupos de estudio

Las horas de consulta del curso son

Grupo	Profesor	Horario de consulta
1	Greivin Hernández greivin.hernandez@ucr.ac.cr	Miérc. 3-5 p.m., Of. 313, oficinas de Matemática
2	Luis Rojas luismiguel.rojas@ucr.ac.cr	Lunes 3-5 p.m., Of. 125, edificio Antares

La Vicerrectoría de Vida Estudiantil cuenta con los llamados “Estudiaderos” los cuales son atendidos por asistentes que evacuarán las dudas que surjan mientras estudia. Para mayor información diríjase al CASE, ubicado en el 2do piso del Edificio Física-Matemática.

8 Bibliografía

- Apostol, Tom: Calculus. Segunda Edición, Vol I y II. Editorial Reverté, España, 1982.
- Piza Volio, Eduardo: Introducción al Análisis Real en una variable. EUCR, 2006.
- Bartle, R. y Sherbert, D. : Introducción al Análisis matemático. Segunda edición. Editorial Limusa, Méxic, 1979.
- Demidovich, P.B.: Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial MIR, Moscú, 1977.
- Demidovich, P.B.: 5000 Problemas de Análisis Matemático. Editorial MIR, Moscú, 1985.
- Piskunov, N.: Cálculo Diferencial e Integral Tomo I y II. Editorial MIR, Moscú, 1978.
- Stewart, J.: Cálculo Multivariable. Cuarta Edición , Thompson Learning, México DF.
- J.Marsden y A. Tromba: Cálculo Vectorial. Tercera Edición. Adison Wesley, 1988.
- Hoffman-Kunze. Álgebra Lineal. Primera Edición, Prentice Hall, 1973.
- Howard Anton. Introducción al Álgebra Lineal. Tercera Edición, Ed Limusa1992.

- Arce, C., Castillo, W., González, J.: Algebra Lineal, Editorial de La Universidad de Costa Rica, San Pedro (2003).
- Grossman, S.: Aplicaciones de Algebra Lineal. Editorial Iberoamericana, México (1988).
- Hammond, P., Sydsaeter, K.S.: Matemática para el análisis económico. Prentice Hall, Madrid (1996).
- Lang, Serge: Cálculo. Addison-Wesley Iberoamericana, E.U.A. (1990).