



Naturaleza del curso: Teórico-práctico

Requisito: MA1001 Cálculo I

Créditos: 4

Horas semanales: 10

Modalidad: Semestral

Estimados estudiantes:

Reciba una cordial bienvenida al curso MA-1002 CálculoII. En este documento se le brinda la información general sobre los principales aspectos del curso que usted necesita para un desempeño adecuado. Es su responsabilidad leer y estar al tanto de toda la información que aquí se le suministra.

Descripción del curso

Este es un segundo curso clásico de CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL el cual le brinda al estudiante conceptos básicos del análisis matemático que se utilizarán en otros cursos como Cálculo en varias variables y Ecuaciones diferenciales.

El curso requiere de una gran cantidad de trabajo ya que su programa es extenso, aparte de las 10 horas de clase semanales se deben dedicar mínimo 12 horas de trabajo extra clase correspondientes al valor de los 4 créditos del curso. El material didáctico de la Cátedra de Cálculo II contiene toda la teoría necesaria para el curso, además de ejercicios adecuados al nivel del mismo. El material es una referencia, se pueden utilizar textos complementarios como los que se proporcionan en la bibliografía.

Los temas que se desarrollan en el curso son: Polinomios de Taylor y sus aplicaciones, Integrales Impropias, Inducción Matemática, Sucesiones Numéricas, Series Numéricas, Series de Potencias, Series de Taylor, Coordenadas Polares, Secciones Cónicas y Números Complejos. El tema de funciones hiperbólicas se desarrollará a través de los ejercicios de los diferentes temas.

Cada tema de la teoría requiere la solución de ejercicios propuestos. La solución de todos los ejercicios es responsabilidad del estudiante. Ejercicios similares a los de las listas pueden ser evaluados y serán la base de los exámenes parciales.

El docente puede asignar la lectura de algunas secciones de teoría cuando el tiempo en el aula no permita cubrir todo el material. De esta manera se puede dedicar tiempo al trabajo práctico, la solución de ejercicios. La asistencia a las lecciones no es obligatoria, sin embargo se espera una participación activa en las mismas, siendo solución de ejercicios una de las prioridades en el trabajo diario. Las evaluaciones en clase como quices o comprobaciones no se reponen.

Objetivos generales del curso

Como objetivos generales se señalan los siguientes:

1. Continuar con el estudio del cálculo en una variable, ampliando y complementando algunos temas desarrollados en el curso MA1001 Cálculo I.
2. Familiarizar al estudiante con algunas aplicaciones del cálculo diferencial e integral para ingeniería, física, química y otras disciplinas.
3. Proporcionar al estudiante de una serie de herramientas matemáticas indispensables para su formación profesional.
4. Introducir al estudiante en el uso de tecnologías computacionales que le permitan comprender mejor algunos conceptos que se estudian en el curso.

Objetivos específicos

1. Complementar el estudio de las funciones elementales, con una introducción de las funciones hiperbólicas.
2. Estudiar las aplicaciones de los Polinomios de Taylor, para el cálculo de funciones, de integrales no susceptibles al cálculo exacto, desarrollos limitados y límites indeterminados.
3. Extender la definición de Integral a la noción de Integral Impropia, de utilidad en diversas aplicaciones a la física, economía y cálculo de probabilidades.
4. Aplicar el Principio de Inducción Matemática en la demostración de proposiciones sobre los números naturales.
5. Estudiar el concepto de Sucesión Numérica, Sucesión creciente, Sucesión decreciente, Sucesión acotada superiormente, Sucesión acotada inferiormente, Serie Numérica. Además de estudiar los criterios de convergencia, el cálculo de la suma de una serie convergente y la estimación del error.
6. Estudiar las Series de Potencias, intervalo de convergencia, derivación e integración y las Series de Taylor.
7. Introducir el uso de Coordenadas Polares en el estudio de curvas planas y simetrías, para la resolución de problemas.
8. Obtener la ecuación de una Sección Cónica, dadas ciertas condiciones, para el trazado de la curva en un sistema de coordenadas cartesianas y para la resolución de problemas.
9. Realizar operaciones con Números Complejos, para la resolución de problemas.

Contenidos

Los contenidos del curso se dividen en ocho capítulos que se describen a continuación:

CAPITULO I: APLICACIONES DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR

Polinomios de Taylor y de Maclaurin. Resto de Lagrange. Cálculos aproximados y análisis del error. Definición de o pequeña de Landau. Desarrollos limitados. Resto de Young. Cálculo de límites indeterminados.

CAPITULO II: INTEGRALES IMPROPIAS

Introducción al tema. Definición de integral impropia de primera, segunda y tercera especie. Cálculo de integrales impropias con primitiva simple. Criterios básicos de convergencia de las integrales impropias de primera especie: De la Condición Necesaria, p -integral, Comparación Directa, Comparación por Cociente o al Límite, Convergencia Absoluta, Convergencia Condicional y la Condición de Dirichlet. Criterios básicos de convergencia de las integrales impropias de segunda especie: P -integral, Comparación Directa, Comparación por Cociente o al Límite, Convergencia absoluta y convergencia condicional. Análisis de integrales impropias utilizando desarrollos limitados y equivalencia asintótica.

CAPITULO III: INDUCCIÓN MATEMÁTICA Y SUCESIONES NUMÉRICAS

Inducción Matemática: Introducción básica al tema. Demostración de proposiciones aplicando el principio de inducción matemática.

Sucesiones Numéricas: Convergentes y divergentes. Álgebra de sucesiones convergentes. Sucesiones Crecientes, decrecientes, acotadas superiormente y/o inferiormente. Teorema de la Convergencia Monótona. Cálculo de límites de sucesiones mediante desarrollos generalizados. Sucesiones definidas por recurrencia.

CAPITULO IV: SERIES NUMÉRICAS

Series Numéricas: Convergentes y divergentes. Series geométricas. Series telescópicas. Criterio de la condición necesaria. Criterio de comparación directa y Criterio de comparación al límite. Criterio de la integral, p -series. Criterio de series alternadas convergentes. Convergencia absoluta y convergencia condicional. Criterios de la razón de D'Alembert, de la raíz enésima de Cauchy y de Raabe. Fórmula de Stirling. Estudio de convergencia de series utilizando desarrollos generalizados. Cálculo aproximado de la suma de una serie y estimación del error.

CAPITULO V: SERIES DE POTENCIAS

Series de potencias: Radio de convergencia. Dominio de convergencia y análisis en los extremos. Funciones definidas por medio de series de potencias. Derivación e integración de series de potencias término a término. Series de Taylor. Suma de series de potencias convergentes.

CAPITULO VI: SECCIONES CÓNICAS

Elipse, hipérbola y parábola centradas en el origen. Traslaciones. Ecuación canónica de una elipse, hipérbola y parábola. Elementos de una sección cónica. Trazado de la gráfica de una sección cónica. Intersección de secciones cónicas. Secciones cónicas degeneradas: Circulo, punto, vacío, una recta, dos rectas secantes. Excentricidad. Cálculo del área de una región elíptica. Ecuaciones paramétricas.

CAPITULO VII: COORDENADAS POLARES

Sistema de coordenadas polares. Representaciones múltiples de puntos. Relación entre coordenadas polares y rectangulares: Conversión de puntos y de ecuaciones. Análisis de gráficos: Simetrías. Pendiente de una recta tangente. Tangentes verticales, horizontales y al polo. Área de una región polar y longitud de un arco polar.

CAPITULO VIII: NÚMEROS COMPLEJOS

Forma algebraica de un número complejo. Representación geométrica de un número complejo. Operaciones fundamentales: adición, sustracción, división, potenciación, radicación. Forma trigonométrica de un número complejo. Operaciones fundamentales de número complejos dados en forma trigonométrica. Fórmula de De Moivre. Función exponencial con exponente complejo. Fórmula de Euler. Forma exponencial de un número complejo. Ecuaciones en una variable con soluciones complejas. Raíces n-ésimas de un número complejo. Sistemas de ecuaciones lineales con números complejos.

Objetivos de aprendizaje

A continuación se describen los objetivos de aprendizaje para cada examen parcial:

PRIMER PARCIAL

1. Calcular el límite de una expresión algebraica que involucre al menos una función hipérbolica.
2. Determinar el Polinomio de Taylor y el Resto de Lagrange que corresponde a una función de variable real alrededor de un valor dado.
3. Calcular el valor aproximado de una función o de una integral definida, conociendo el Polinomio de Taylor correspondiente alrededor de un valor dado, incluyendo la estimación del error cometido dependiendo de la cantidad de términos del Polinomio de Taylor que se utilicen al realizar la aproximación.
4. Determinar el desarrollo limitado de una función, conociendo el Polinomio de Taylor correspondiente alrededor de un valor dado.

5. Calcular límites de expresiones algebraicas aplicando los desarrollos limitados.
6. Calcular el valor de una integral impropia de primera especie, es decir la integral de una función de variable real continua en un intervalo de longitud infinita, para establecer si es convergente o divergente.
7. Calcular el valor de una integral impropia de segunda especie, es decir la integral de una función de variable real que posee una cantidad finita de asíntotas verticales en un intervalo de longitud finita, para establecer si es convergente o divergente.
8. Calcular el valor de una integral impropia de tercera especie, es decir la integral de una función de variable real continua que posee una cantidad finita de asíntotas verticales en un intervalo de longitud infinita, para establecer si es convergente o divergente.
9. Determinar si una integral impropia de primera especie converge o diverge, utilizando alguno de los siguientes criterios: De la Condición Necesaria, p -integral, Comparación Directa, Comparación por Cociente o al Límite, Convergencia Absoluta, Convergencia Condicional la Condición de Dirichlet y Comparación utilizando desarrollos limitados.
10. Determinar si una integral impropia de segunda especie converge o diverge, utilizando alguno de los siguientes criterios: p -integral, Comparación Directa, Comparación por Cociente o al Límite, Convergencia Absoluta, Convergencia Condicional y Comparación utilizando desarrollos limitados.
11. Determinar si una integral impropia de una función discontinua sobre un intervalo no acotado converge o diverge, utilizando los criterios que se pueden aplicar a las integrales impropias de primera y de segunda especie.

SEGUNDO PARCIAL

1. Demostrar proposiciones que se cumplen para infinidad de números naturales, aplicando el Principio de Inducción Matemática.
2. Calcular el límite de una sucesión numérica, para determinar si converge o diverge. Cálculo de límites utilizando desarrollos generalizados.
3. Demostrar que una sucesión numérica es creciente o decreciente.
4. Demostrar que una sucesión numérica es acotada superiormente o inferiormente.
5. Demostrar que una sucesión numérica converge, aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona, y cuando sea posible calcular el valor de convergencia, incluyendo sucesiones definidas recursivamente.
6. Determinar si una serie geométrica es convergente o divergente.
7. Determinar si una serie telescópica es convergente o divergente.
8. Calcular el valor de convergencia de series geométricas, series telescópicas o de combinación de ambas.

9. Determinar si una serie numérica converge o diverge, aplicando alguno de los siguientes criterios: De la Condición Necesaria, de la Integral, p -serie, Comparación Directa, Comparación por Cociente o al Límite, Series Alternadas, Convergencia Absoluta, Convergencia Condicional, de la Razón, de la Raíz enésima, de Raabe.
10. Determinar si una serie numérica converge o diverge, aplicando desarrollos generalizados.
11. Calcular el valor aproximado de la suma de una serie convergente, incluyendo la estimación del error cometido al realizar la aproximación.
12. Determinar el radio e intervalo de convergencia de una serie de potencias.
13. Calcular la derivada de una serie de potencias, incluyendo su radio e intervalo de convergencia.
14. Calcular la integral de una serie de potencias, incluyendo su radio e intervalo de convergencia.
15. Determinar la serie de Taylor que corresponde a una función de variable real, alrededor de un valor dado, incluyendo su radio e intervalo de convergencia.
16. Determinar la suma en forma explícita de una serie de Taylor alrededor de un valor dado.

TERCER PARCIAL

1. Convertir puntos en coordenadas cartesianas a coordenadas polares, o bien convertir puntos en coordenadas polares a coordenadas cartesianas.
2. Convertir ecuaciones en coordenadas cartesianas a coordenadas polares, o bien convertir ecuaciones en coordenadas polares a cartesianas.
3. Calcular la ecuación de una recta tangente a un punto de una curva en coordenadas polares, obteniendo su pendiente con la fórmula $m = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$, donde $y = r \sin \theta$,
 $x = r \cos \theta, r = f(\theta)$.
4. Determinar los puntos de una curva en coordenadas polares en donde posee una recta tangente horizontal o una recta tangente vertical.
5. Determinar las rectas tangentes al polo de una curva en coordenadas polares.
6. Determinar los puntos de intersección de dos curvas en coordenadas polares.
7. Calcular el área de una región delimitada por una curva en coordenadas polares, o bien por dos curvas en coordenadas polares, en un intervalo de longitud finita.
8. Calcular la longitud de un arco delimitado por una curva en coordenadas polares, o bien por dos curvas en coordenadas polares, en un intervalo de longitud finita.
9. Determinar el centro, vértices y focos de una elipse horizontal o de una elipse vertical, incluyendo el trazado de su gráfica.

10. Determinar el centro, vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas oblicuas de una hipérbola horizontal o de una hipérbola vertical, incluyendo el trazado de su gráfica.
11. Determinar el vértice, foco y la ecuación de la directriz de una parábola horizontal o de una parábola vertical, incluyendo el trazado de su gráfica.
12. Determinar la ecuación de una sección cónica (elipse, hipérbola o parábola) horizontal o vertical, dadas varias condiciones como puntos de la curva y su excentricidad.
13. Determinar los puntos de intersección de dos secciones cónicas.
14. Calcular el área de una región elíptica dada la ecuación canónica de la elipse que corresponde a su frontera.
15. Determinar las ecuaciones paramétricas de un sección cónica dada su ecuación cartesiana.
16. Calcular operaciones entre dos o más números complejos de la forma $a + bi$ (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones utilizando el conjugado de un número complejo y operaciones combinadas).
17. Resolver ecuaciones polinómicas de grado n con $n \in \mathbb{N}$, cuyas soluciones sean complejas.
18. Convertir un número complejo de la forma $z = a + bi$ a su forma polar $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, donde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|}$, $\theta \in [0, 2\pi[$.
19. Calcular multiplicaciones, divisiones y potencias de números complejos en forma polar.
20. Calcular las raíces enésimas de un número complejo en forma polar.
21. Convertir un número complejo en su forma polar a su forma exponencial, aplicando la fórmula de Euler, o bien convertir un número complejo en su forma exponencial a su forma polar y/o a su forma $a + bi$.

Evaluación

Los grupos regulares la evaluación se basa en tres exámenes parciales, los cuales tienen la siguiente ponderación: Los dos parciales más altos valen 35% y más bajo 30%

De acuerdo a la nota final (NF) hay 3 posibilidades:

- ◇ Si $NF \geq 7,0$, el estudiante gana el curso.
- ◇ Si $6,0 \leq NF < 7,0$, el estudiante tiene derecho al examen de ampliación, **el cual es de toda la materia del curso**. El estudiante que obtenga en la prueba de ampliación una nota de 7,0 o superior, tendrá una nota final de 7,0. En caso contrario, mantendrá su nota final de 6,0 ó 6,5, según corresponda.
- ◇ Si $NF < 6,0$, el estudiante pierde el curso.

Los exámenes parciales son colegiados y su resolución es individual. En los exámenes se permitirá solamente el uso de una calculadora científica no programable, **no se permitirá el uso de celulares ni de otros dispositivos electrónicos**.

No se permitirá el ingreso de estudiantes que se presenten al sitio de aplicación de un examen

después de 30 minutos de haber iniciado la prueba, ni retirarse antes de 30 minutos de iniciada la prueba, salvo casos de fuerza mayor. Las fechas que se indican a continuación podrían variar por razones de fuerza mayor, en cuyo caso se avisaría en la página Web de la Escuela de Matemática (<http://emate.ucr.ac.cr>), en la plataforma Claroline de la cátedra,

(http://claroline.emate.ucr.ac.cr/claroline/claroline/course/index.php?cid=00MA1002_001)

y en el pizarrón de MA1002 del segundo piso del edificio de Matemática.

<u>Examen</u>	<u>Fecha</u>	<u>Hora</u>	<u>Semana a evaluar</u>
I Parcial	viernes 29 de Enero del 2016	2:00 p.m.	1-2
II Parcial	viernes 12 de Febrero del 2016	2:00 p.m.	3-5
III Parcial	viernes 26 Febrero del 2016	2:00 p.m.	6-8
Ampliación	viernes 4 de Marzo del 2016	2:00 p.m.	1-8

Los exámenes parciales y ampliación solo se repondrán por motivos contemplados en el artículo 24 del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil. **No es justificación de ausencia a exámenes ordinarios paseos familiares, viajes al extranjero, horarios de trabajo, y en general actividades habituales que impidan la presencia del estudiante.**

La solicitud de reposición de cualquier examen, junto con la justificación correspondiente, debe presentarse personalmente en el horario establecido por el profesor del grupo, a más tardar cinco días hábiles después de haberse aplicado el examen. La boleta de solicitud de examen de reposición la podrá obtener en la página Web de la Escuela de Matemática (<http://emate.ucr.ac.cr>).

En cuanto al examen de ampliación se presentarán al mismo todos aquellos estudiantes que tengan el derecho respectivo, según el artículo 3, inciso p, del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil, **el examen es de toda la materia del curso.**

Bibliografía

La bibliografía incluida en este programa constituye una guía para el docente y el estudiante en cuanto al nivel de presentación de los temas que forman el programa. El docente puede ampliarla con otros libros de referencia.

- Walker Ureña, Miguel. Apuntes por tema de los contenidos de MA1002 Cálculo II. Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática. Costa Rica. 2014
- Zill, Dennis G. y Wright, Warren S. "Cálculo. Trascendentes tempranas". Cuarta edición. McGraw-Hill/Interamericana editores, S.A. de C.V. México. 2011.
- Poltronieri, Jorge. "Cálculo No. 2". Serie CABECAR. UCR. 1998.
- Edwards y Penney. "Cálculo y Geometría Analítica". Cuarta Edición Prentice-Hall. México. 1996.

- Stewart, James. "Cálculo". Segunda Edición. Editorial Iberoamericana. México. 1994.
- Churchill Ruel V., Brown James W. "Variable compleja y aplicaciones". Quinta edición. McGraw Hill. México D.F., 1992
- Larson & Hostetler. "Cálculo y Geometría Analítica". Tercera Edición. McGraw - Hill. México. 1989.
- Swokowski, Earl. "Cálculo con Geometría Analítica". Segunda Edición. Editorial Iberoamericana. México. 1988.
- Apostol, Tom M. "Calculus" Volumen 1 y 2. Editorial Reverté. Segunda edición. 1978.
- Demidovich, B. "Problemas y ejercicios de Análisis Matemático". Editorial MIR. Moscú. 1977.
- Piskunov N. "Cálculo Diferencial e Integral". Tomo I. Segunda Edición. Editorial MIR. MOSCU. 1973.
- Piza Volio, E. " Introducción Cálculo diferencial e integral en una variable" Editorial Universidad de Costa Rica, 2002.

Notas importantes

1. El CASE desarrolla un programa de apoyo a los estudiantes de MA1002, dichas actividades se publicarán en la pizarra del curso.
2. La cátedra no puede garantizar que durante los exámenes haya completo silencio en los edificios. Solamente en situaciones de fuerza mayor se puede suspender y reprogramar un examen.
3. No se permite el uso de celulares ni de otros dispositivos electrónicos en las clases, sin la autorización del profesor o profesora.
4. En caso de existir alguna queja o malestar, sea con respecto al curso, al material o al profesor o a la profesora, debe seguirse el debido proceso y presentar la queja a tiempo (para que haya posibilidades de corregir la situación) y ante quien corresponda. La primera instancia es con el profesor o la profesora, la siguiente instancia es informar a la coordinación. Siempre se estará anuente a escuchar cualquier queja y a realizar el mejor esfuerzo para resolver el problema. En todos los casos se seguirá la normativa del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil:

http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen_academico_estudiantil.pdf

y del Reglamento de Régimen Disciplinario del Personal Académico:

http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen_disciplinario_docente.pdf

Coordinación

Puede comunicarse por correo electrónico a la siguiente dirección:

`ignacio.bustamante@ucr.ac.cr`

Atentamente,

Ignacio Bustamante B.
Coordinador de la Cátedra de MA1002
Oficina 310 Edificio Nuevo, tel. 2511-6618
Casillero 122, Escuela de Matemática

Programación del Curso: Distribución por semanas

Semana 1 Polinomios de Taylor	4-8 Enero
Definición de polinomios de Taylor, cálculos aproximados, restos de Lagrange y desarrollos limitados	
Semana 2 Integrales impropias	11-15 Enero
Cálculo de integrales impropias y análisis de convergencia	
Semanas 3 Inducción, sucesiones y series	18-22 Enero.
Inducción, límites de sucesiones, series geométricas y telescópicas.	
Semana 4 Series	25-29 Enero.
Análisis de convergencia de series numéricas.	
Semana 5 Series de Potencias	1 -5 Febrero.
Radio, intervalo de convergencia, cálculo de la suma en forma explícita	
Semana 6 Cónicas y coordenadas polares	8-12 Febrero.
Estudio de la parábola, elipse y la hipérbola. deficciones sobre coordenadas polares, curvas usuales, tangentes.	
Semana 7 Polares y complejos	15-21 Febrero.
Cálculo de áreas en polares. Operaciones con números complejos.	
Semanas 8 Repaso	22-26 Febrero.
Temas del III Parcial.	