

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

MA1210 CÁLCULO I PARA CIENCIAS DE LA SALUD

III CICLO, 2015



Estimados(as) estudiantes:

De parte de los profesores de la cátedra MA1210, Cálculo I para Ciencias de la salud, reciba la más cordial bienvenida. En este documento se le brinda la información general sobre los principales aspectos del curso que usted necesita para un desempeño adecuado en él. Esperamos que este ciclo sea productivo y que el éxito se refleje en todos sus quehaceres universitarios, muy particularmente en este curso.

## Aspectos generales del curso

### Introducción

Este es un curso que tiene como propósito que el estudiante tenga los conocimientos básicos del cálculo diferencial e integral, y que los utilice en la resolución de problemas matemáticos.

El aprendizaje de los conceptos en el curso MA-1210 requiere de gran cantidad de práctica y dedicación de su parte, así como el repaso de conceptos, definiciones y teoremas. El curso es de **tres créditos**, esto significa que las cinco horas lectivas por semana que usted recibe como estudiante del curso, no son suficientes para apropiarse de los conocimientos y habilidades que proporciona cada contenido del mismo, es necesario que se dedique más tiempo fuera del horario de clase para el estudio y desarrollo de los ejercicios propuestos.

Además es preciso tener un buen dominio de los contenidos estudiados en secundaria. Si usted considera que tiene deficiencias en algunos de ellos es importante que dedique tiempo adicional al estudio de esos conceptos.

### Apoyo adicional a las clases:

1. En la plataforma [www.moodlenucr.ac.cr](http://www.moodlenucr.ac.cr) puede revisar diversos documentos y videos, así como realizar autoevaluaciones para complementar su estudio.
2. El Centro de Asesoría Estudiantil (CASE) también pone a su disposición los llamados "Estudiaderos", los cuales son atendidos por asistentes que le ayudarán aclarándole dudas. Para mayor información revisar la pizarra del curso, segundo piso del edificio de Física-Matemática.

## Objetivos generales

1. Adquirir conocimientos básicos de límites, derivadas e integrales.
2. Resolver ejercicios matemáticos referentes al curso.
3. Aplicar métodos diferenciales e integrales en problemas relacionados con su área de estudio o afines.

## Contenidos

### Límites y Continuidad

Noción intuitiva de límite. Límites laterales. Cálculo gráfico de límites. Propiedades. Cálculo analítico de límites de funciones algebraicas (forma  $\frac{0}{0}$ ) mediante factorización, operaciones con expresiones algebraicas, racionalización y sustitución. Cálculo analítico de límites infinitos y al infinito de funciones algebraicas. Formas indeterminadas  $0 \cdot \pm\infty$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $+\infty - \infty$ . Continuidad en un punto. Continuidad en un intervalo. Clasificación de las discontinuidades. Cálculo de límites con funciones exponenciales y logarítmicas. Regla de L'Hopital. Formas indeterminadas  $1^{\pm\infty}$ ,  $\pm\infty^0$ ,  $0^0$ . Cálculo de límites con funciones trigonométricas inmediatos, utilizando identidades trigonométricas, los límites especiales :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$  y la regla de L'Hôpital.

### Derivadas y aplicaciones

El problema de la recta tangente. Definición de derivada. Derivabilidad de una función en un punto. Derivabilidad y continuidad. Derivabilidad de funciones con criterio dividido. Reglas básicas de derivación de funciones (incluyendo regla de la cadena). Derivadas de orden superior. Derivación implícita. Problemas sobre recta tangente y normal. Valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado. Derivada como razón de cambio. Razones de cambio relacionadas. Funciones crecientes y decrecientes. Criterio de la primera y segunda derivada. Criterio de concavidad. Puntos de inflexión. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Trazado de curvas. Problemas de optimización. Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas. Derivación logarítmica. Derivación de funciones trigonométricas y trigonométricas inversas.

### Integrales

Definición y propiedades de la integral indefinida. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas y por sustitución. La integral definida como el área bajo la curva. Propiedades de la integral definida. Teoremas fundamentales del cálculo. Cálculo de integrales que involucran funciones exponenciales o logarítmicas, de manera inmediata o por sustitución. Integrales cuyo resultado es un logaritmo. Integración de funciones trigonométricas. Integrales cuyo resultado es una inversa trigonométrica (incluye completar cuadrados). Integración por partes. Integración por fracciones parciales. Integración por fracciones parciales. Integración por métodos combinados. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas entre dos o más curvas.

### Función Exponencial y logarítmica. Función trigonométrica

Definición de logaritmo natural como integral. Función exponencial como inversa de la función logarítmica. Propiedades y problemas con funciones exponenciales y logarítmica. Repaso sobre funciones trigonométricas. Funciones trigonométricas inversas.

### Metodología

La estrategia principal para desarrollar el curso es la clase magistral, trabajo individual y trabajo en grupos.

Recalamos que el estudiante requiere de muchas horas de estudio fuera de clase para hacer prácticas, ya que para cada tema encontrará gran cantidad de ejercicios para reforzar lo visto en clase. En las lecciones prácticas es sumamente importante la participación del estudiante en la resolución de problemas, con el fin de detectar errores y corregirlos.

## Material del curso

Los materiales de apoyo y las prácticas del curso pueden ser accedidos en la plataforma Moodlenew. Se proporcionarán todas las indicaciones necesarias para que pueda inscribirse y utilizar dicho material. Además durante verano se ofrecerán sesiones adicionales de apoyo tipo .<sup>es</sup>tudiaderos cuyo horario será publicado en la pizarra del curso.

## Evaluación

Se realizarán tres pruebas parciales. La nota de aprovechamiento ( $NA$ ) que el estudiante obtiene al finalizar el curso será :  $NA = 0,10 \cdot Q + 0,30 \cdot A + 0,30 \cdot B + 0,30 \cdot C$ , donde  $Q$  es la nota obtenida en quices (programados por el profesor);  $A, B$  y  $C$  son las notas obtenidas en tres parciales, de modo que  $A \leq B$  y  $A \leq C$ .

De acuerdo a la nota de aprovechamiento ( $NA$ ) hay 3 posibilidades:

- ‡ Si  $NA \geq 6,75$  el estudiante aprueba el curso.
- ‡ Si  $5,75 \leq NA < 6,75$  el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación, en el cual debe obtener una nota mayor o igual a 7.0 para aprobar el curso. En caso de aprobar dicho examen se le reportará 7,0 como nota final, de lo contrario se le reportará 6,0 ó 6,5, según corresponda.
- ‡ Si  $NA < 5,75$  el estudiante reprueba el curso.

### Artículo 25 del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil:

La calificación final del curso se notifica a la Oficina de Registro e Información, en la escala de cero a diez, en enteros y fracciones de media unidad.

La calificación final debe redondearse a la unidad o media unidad más próxima. En casos intermedios, es decir, cuando los decimales sean exactamente “punto veinticinco”(0.25) o “ punto setenta y cinco” (0.75) , deberá redondearse hacia la media unidad o unidad superior más próxima. La calificación final de siete (7.0) es la mínima para aprobar el curso

### Sobre el examen de ampliación:

Como se mencionó anteriormente, aquellos estudiantes cuya nota de aprovechamiento sea inferior a 6,75 pero mayor a 5.75 podrán realizar el examen de ampliación.

Al estudiante se le evaluarán los contenidos de los parciales en los que obtuvo una nota inferior a 7.0.

## Exámenes

A continuación se presenta el calendario de exámenes. Es importante aclarar que estas fechas son provisionales y su ratificación o variación dependen de la ubicación en el calendario general de exámenes de la Facultad de Ciencias. Se le sugiere pasar con frecuencia a la **pizarra del curso** (ubicada en el pasillo del 2do piso del edificio de Física- Matemática) para confirmar la fecha y hora de cada prueba, o bien consultarlo **plataforma Moodlenew**.

Examen	Fecha	Hora
<b>I Parcial</b>	Viernes 22 de enero	08:00
<b>II Parcial</b>	Viernes 12 de febrero	08:00
<b>III Parcial</b>	Lunes 29 de febrero	08:00
<b>Ampliación</b>	Viernes 04 de marzo	08:00
<b>Suficiencia</b>	Viernes 04 de marzo	08:00

Todo estudiante debe realizar sus exámenes **en el grupo en que está matriculado**. Para tener derecho a realizar la prueba el estudiante **debe presentar una identificación con foto**: cédula de identidad, carné de la UCR, pasaporte o licencia de conducir, **en buen estado**.

**En ninguna de las pruebas se permitirá el uso de calculadoras programables, graficadoras ni que realicen cálculo simbólica. Además, se debe llevar un cuaderno de examen.**

### **Ausencias a los exámenes**

En casos debidamente justificados, tales como enfermedad del estudiante (con comprobante médico), haber presentado dos exámenes el mismo día, choque de exámenes ( con constancia del coordinador respectivo), la muerte de un pariente hasta segundo grado de consanguinidad, o casos de giras (reportados por escrito) y con el visto bueno del órgano responsable, se le permitirá al estudiante reponer el examen durante el periodo lectivo.

En cualquier caso, el estudiante debe dirigirse a la secretaría de la Escuela de Matemática (ubicada en el 2do piso) para adquirir una boleta de solicitud de reposición, la cual debe llenar con **todos los datos** que se le solicitan (también puede descargarla de la plataforma MoodleNew o en <http://emate.ucr.ac.cr>). Además, debe anexar los documentos que prueban el motivo de su ausencia. Dichos papeles deben ser entregados **personalmente a la coordinación junto con una copia** en los primeros **tres días hábiles** después de haber realizado el examen. También debe entregarse **una copia al profesor** encargado del grupo donde está matriculado. Posterior a ese plazo, **se colocará en la pizarra del curso y en la plataforma MoodleNew la lista de estudiantes con solicitud de examen de reposición aprobada**. La prueba se efectuará en la fecha indicada en el punto anterior.

### **Importante:**

**Si el estudiante no se presenta a la realización de la prueba en la fecha y hora establecida por olvido o desconocimiento de cuándo y dónde sería efectuado, no se le aplicará una reposición del examen**, por lo que la calificación correspondiente a dicho parcial será cero.

### **Justificación de una ausencia por haberse presentado a realizar examen de MA1210:**

Si el estudiante debe justificar la ausencia a un examen u otra actividad por presentarse a realizar una prueba de MA1210, debe adquirir en la secretaría de la Escuela de Matemática una **boleta** para tales fines (también puede descargarla de [www.moodlenew.emate.ucr.ac.cr](http://www.moodlenew.emate.ucr.ac.cr), <http://emate.ucr.ac.cr>), **llenarla con todos los datos que se solicitan y llevarla el día de la aplicación de la prueba** para que la persona encargada de la coordinación o un profesor de la cátedra la firme. Posteriormente debe llevarse nuevamente a la secretaría de la Escuela de Matemática para que la **sellen**.

## Objetivos de aprendizaje

A continuación se detallan los objetivos específicos que se espera que logren los estudiantes. Los mismos son considerados para la selección de los ejercicios y problemas que se plantean en los exámenes.

### I Parcial

1. Calcular límites de funciones algebraicas por medio de evaluación directa.
2. Aplicar las propiedades de los límites en la resolución de ejercicios.
3. Calcular límites de funciones algebraicas que presentan la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$  por medio de factorización, racionalización (una o dos veces), operaciones con expresiones algebraicas o sustitución.
4. Determinar el valor de un parámetro de una función, para que un límite dado exista.
5. Calcular límites infinitos y al infinito de funciones algebraicas.
6. Calcular límites que presentan una o dos expresiones en valor absoluto.
7. Calcular límites de funciones con criterio dividido cuando  $x$  tiende a cualquier número real o infinitos.
8. Determinar la continuidad o discontinuidad de una función algebraica en un punto.
9. Determinar la continuidad en  $\mathbb{R}$  de una función algebraica de un criterio o de criterio dividido.
10. Clasificar en evitables o inevitables las discontinuidades de una función algebraica, de un criterio o de criterio dividido.
11. Calcular la derivada de una función algebraica de una función algebraica utilizando la definición o las reglas de derivación (incluyendo la regla de la cadena).
12. Determinar la derivabilidad de una función de criterio dividido utilizando la definición.
13. Justificar la continuidad o derivabilidad de una función algebraica en un intervalo abierto.
14. Determinar las condiciones que deben cumplir el (los) parámetro(s) de una función de criterio dividido, para que sea continua o derivable en un punto, en un intervalo o en  $\mathbb{R}$ .
15. Determinar el valor de un límite o su inexistencia, la continuidad o discontinuidad en un punto, el valor de la derivada o la no derivabilidad en un punto, conociendo la gráfica de la función.
16. Realizar el esbozo de la gráfica de una función que satisfaga condiciones mínimas dadas en cuanto a imágenes, límites, continuidad y derivabilidad.
17. Calcular derivadas de orden superior en funciones algebraicas.
18. Efectuar derivaciones implícitas.
19. Resolver problemas que involucran la pendiente o la ecuación de una recta tangente o normal a una curva definida de modo explícito o implícito.

**II Parcial**

1. Resolver problemas de razones de cambio.
2. Justificar la existencia de valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado.
3. Determinar los valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado .
4. Determinar el dominio de una función y los puntos de intersección con los ejes.
5. Determinar la ecuación de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas correspondientes a una función (si existen).
6. Determinar intervalos de monotonía de una función y sus valores extremos relativos.
7. Determinar intervalos en los que la gráfica de la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo, y puntos de inflexión.
8. Construir un cuadro de variación.
9. Trazar la gráfica de una función.
10. Realizar el esbozo de la gráfica de una función que cumpla con las características mínimas requeridas en cuanto a dominio, imágenes, intersecciones con ejes, monotonía, extremos relativos, concavidad, puntos de inflexión, entre otros.
11. Derivar funciones que involucran exponenciales y logarítmicas.
12. Derivar funciones aplicando el método de derivación logarítmica.
13. Resolver problemas que involucran funciones exponenciales y logarítmicas.
14. Calcular integrales definidas e indefinidas de manera directa o por sustitución.
15. Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la derivada con respecto a  $x$  de funciones del tipo

$$f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(u) du$$

16. Calcular integrales definidas del valor absoluto de funciones.
17. Aplicar propiedades básicas de la integral en la resolución de ejercicios.
18. Calcular integrales cuyo resultado es un logaritmo.
19. Graficar funciones básicas y rectas verticales en un mismo sistema de coordenadas.
20. Calcular el área d la región del plano limitada por dos o más curvas.
21. Determinar el valor de un parámetro para que el área bajo una curva en cierto intervalo sea un número dado.

### III Parcial

1. Resolver problemas de optimización.
2. Calcular límites que involucren funciones exponenciales y logarítmicas.
3. Calcular límites que involucren funciones trigonométricas (inmediatos, utilizando identidades trigonométricas o con ayuda de los límites trigonométricos especiales).
4. Calcular límites usando la regla de L'Hôpital (cocientes, productos, diferencias y potencias indeterminadas).
5. Derivar funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas (como en el parcial anterior), trigonométricas, inversas de las trigonométricas y composiciones de ellas.
6. Calcular integrales definidas e indefinidas de manera directa, por sustitución, por partes, por fracciones parciales, con identidades trigonométricas y completando cuadrados.
7. Calcular integrales definidas e indefinidas aplicando combinación de métodos.

### Disposiciones para la realización de pruebas escritas

1. Se debe presentar una **identificación con foto**: cédula de identidad, carné de la UCR, pasaporte o licencia de conducir, **en buen estado**.
2. Las pruebas **deben realizarse en un cuaderno de examen**, sin utilizar hojas sueltas, en forma ordenada, e indicando todas las justificaciones y pasos necesarios en cada respuesta.
3. Se debe resolver todo el examen utilizando bolígrafo de tinta azul o negra. Si la solución de un ejercicio tiene partes en lápiz, con tachones o líquido corrector, pierde el derecho a reclamos posteriores en ese ejercicio.
4. Debe **llevar todos los materiales que necesite**, tales como bolígrafo (con los requisitos señalados antes), lápiz, borrador, tajador y regla, puesto que no se permite el préstamo de ningún tipo de instrumento durante la realización de la prueba.
5. No se permite el ingreso de estudiantes a realizar la prueba después de **treinta minutos** de haberse iniciado la misma, como tampoco se podrá abandonar el recinto de examen en ese periodo de tiempo.
6. **No se permite el uso de calculadora programable ni graficadora, celulares o cualquier otro aparato electrónico**. En caso de portar alguno, debe apagarlo antes de que inicie la prueba y mantenerse guardado en el bolso o salveque.
7. Debe ser realizada de manera individual.
8. Se recomienda utilizar el servicio sanitario (si se necesita) antes de iniciarse la prueba. En caso de tener que utilizarlo durante la aplicación debe **solicitar permiso** a la persona encargada del cuidado de la prueba y **cerrar su cuaderno de examen**.
9. **No se contestan preguntas** durante la administración del examen, salvo que éstas se refieran al formato del mismo.

## **Calificación de exámenes**

El profesor del grupo debe entregar a los alumnos los exámenes calificados, a más tardar diez días hábiles después de haberse realizado la prueba.

La pérdida comprobada de un examen por parte del profesor da derecho al estudiante a una nota equivalente al promedio de su aprovechamiento o, a criterio del estudiante, a repetir el examen.

El estudiante tiene derecho a reclamar ante el profesor lo que considere mal evaluado del examen, en los tres días hábiles posteriores a la finalización del plazo señalado. El profesor deberá atender la petición en un plazo no mayor cinco días hábiles.

Los promedios finales serán colocados por el profesor en la pizarra del curso. Junto a los mismos no aparecerá el nombre de los estudiantes, solamente el número de carné.

## Cronograma del curso

S	Fechas	Contenidos
1	04 al 07 de enero	Presentación del curso y lectura de los elementos importantes de la Carta al Estudiante. Noción intuitiva del límite. Límites laterales. Cálculo gráfico de límites. Propiedades. Cálculo analítico de límites de funciones algebraicas (forma $\frac{0}{0}$ ) mediante factorización y operaciones con expresiones algebraicas mediante racionalización y sustitución. Límites de funciones con criterio dividido. Cálculo analítico de límites infinitos y al infinito de funciones algebraicas. Cálculo gráfico de límites infinitos y al infinito. Formas indeterminadas $0 \cdot \pm\infty$ , $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ , $+\infty - \infty$ .
2	11 al 14 de enero	Continuidad en un punto. Continuidad en un intervalo. Clasificación de las discontinuidades. El problema de la recta tangente. Definición de derivada. Derivabilidad de una función en un punto. Derivabilidad y continuidad. Estudio gráfico de derivabilidad. Reglas básicas de derivación de funciones (incluyendo regla de la cadena). Derivabilidad de funciones con criterio dividido. Derivadas de orden superior. Derivación implícita. Problemas sobre recta tangente y normal.
3	18 al 21 de enero	Derivada como razón de cambio. Razones de cambio relacionadas. Valores extremos absolutos y relativos. Valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado. Funciones crecientes y decrecientes. Criterio de la primera y segunda derivada. Criterio de concavidad. Puntos de inflexión. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Trazado de curvas.
	<b>22 enero</b>	<b>I examen parcial (8:00 am). Contenidos: Semanas 1 y 2.</b>
4	25 al 28 de enero	Definición y propiedades de la integral indefinida. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas y por sustitución. La integral definida como el área bajo la curva. Cálculo de áreas entre dos o más curvas. Propiedades de la integral definida. Teorema Fundamental del cálculo (I parte). Integral definida del valor absoluto de una función.
5	01 al 04 de febrero	Teorema fundamental del cálculo (II parte). Definición de logaritmo natural como integral. Función exponencial como inversa de la función logarítmica. Propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas. Problemas con funciones exponenciales y logarítmicas. Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas. Integrales cuyo resultado es un logaritmo. Derivación logarítmica.
06	08 al 11 de febrero	Problemas de optimización. Cálculo de límites con funciones exponenciales y logarítmicas. Regla de L'Hôpital. Formas indeterminadas $1^{\pm\infty}$ , $\pm\infty^0$ , $0^0$ . Cálculo de integrales que involucran funciones exponenciales o logarítmicas, de manera inmediata o por sustitución. Repaso sobre funciones trigonométrica. Funciones trigonométricas inversas.
	<b>12 febrero</b>	<b>II examen parcial (8 am). Contenidos: semanas 3, 4 y 5.</b>
7	15 al 18 de febrero	Cálculo de límites con funciones trigonométricas (inmediatos, utilizando identidades trigonométricas, utilizando los límites trigonométricos especiales). Derivación de funciones trigonométricas y trigonométricas inversas. Cálculo de límites trigonométricos utilizando L'Hôpital. Integración de funciones trigonométricas. Integrales cuyo resultado es una inversa trigonométrica (incluye completar cuadrados). Integración por partes.
8	22 al 25 de febrero	Integración por fracciones parciales. Integración por métodos combinados.
	<b>29 de febrero</b>	<b>III examen parcial (8:00 am). Contenidos: semanas 6,7 y 8.</b>
	<b>4 de marzo</b>	<b>Examen de Ampliación (8:00 am).</b>

## Bibliografía

Puede complementar su estudio consultando cualquier texto de Cálculo con Geometría Analítica o Cálculo en una variable, ya que la mayoría de ellos presentan los mismos contenidos. Sin embargo, debe tener presente que el enfoque y el orden de los temas puede variar de un texto a otro.

A continuación se le sugieren algunos textos para consulta, los cuales puede revisar en la biblioteca Luis Demetrio Tinoco.

## Referencias

- [1] ALFARO, M, *Apuntes de Cálculo Diferencial e Integral*. Universidad de Costa Rica (2009).
- [2] EDWARDS,C y PENNEY,D, *Cálculo y Geometría Analítica*. 2da edición, México: Mc Grw Hill (1999).
- [3] DEMIDOVICH, B., *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. 2da edición (1967).
- [4] LARSON, R. ; HOSTELER, R. y EDWARDS, B., *Cálculo y Geometría Analítica*. 3ra edición. México: Prentince-Hall (1996).
- [5] MONDRUS, A., *Ejercicios de cálculo I: Área de salud/Profs. Escuela de Matemática*. 3ra edición. Universidad de Costa Rica (2003).
- [6] RODRÍGUEZ, P. y POLTRONIERI, J., *Ejercicios de cálculo I: cálculo diferencial e integral I: cálculo diferencial e integral I*. 4ta edición, Universidad de Costa Rica (2006).
- [7] ROGAWSKI, J., *Cálculo en una variable*. 2da edición.
- [8] STEWART, J. , *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas*. 4ta edición. México: Thomson (2001).
- [9] ZILL, D. *Cálculo y Geometría Analítica*. México: Iberoamérica (1987).

**Nota:** Cualquier otro aspecto que no se haya tomado en cuenta en este documento, será sometido a consideración de la cátedra para su solución.

Atentamente,

Cátedra MA1210  
ma1210.calculo1@gmail.com  
César Vargas Trejos  
CESAR.VARGASTREJOS@ucr.ac.cr