



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
MA-1003 Cálculo III
II CICLO 2018

Carta al Estudiante MA-1003

- **Naturaleza del curso:** teórico.
- **Horas por semana de clase:** 5.
- **Modalidad:** Semestral.
- **Créditos:** 4.
- **Horas de estudio Independiente:** 7.
- **Requisito:** MA-1002.
- **Correquisito:** MA-1004.
- **Coordinador del curso:** José Rosales-Ortega¹

¹Ver página 10 para más información sobre el coordinador.

Índice

1. Descripción del curso.	3
2. Objetivos generales del curso	3
3. Objetivos Específicos	3
4. Actividades de aprendizaje para cumplir los objetivos por parcial	4
4.1. Para el primer parcial	4
4.2. Para el segundo parcial	5
4.3. Para el tercer parcial	5
5. Contenidos	6
5.1. Superficies y funciones vectoriales de una variable real	6
5.2. Derivación parcial y aplicaciones	6
5.3. Integrales múltiples	6
5.4. Análisis Vectorial	7
6. Metodología	7
7. Pautas de evaluación	7
7.1. CRONOGRAMA DE MATERIA POR PARCIAL	8
7.2. CRONOGRAMA DE EXÁMENES	9
7.3. Examen de Ampliación	9
8. Información General	10
8.1. Generalidades sobre normativa	10
8.2. Coordinación	10
8.3. Pizarra del curso y Sitio Moodle	10
8.4. Material disponible	10
8.5. Fechas a tomar en cuenta	11
9. Bibliografía	11
10. Profesores del curso	13

1. Descripción del curso.

El curso de Cálculo III , con siglas MA-1003, trata sobre algunos aspectos de lo que se conoce como Cálculo en varias variables. El objetivo de este curso es extender ciertas nociones del cálculo en una variable a varias variables.

Los tópicos de cálculo III abarcarán los principales temas que incluyen la mayoría de textos tradicionales sobre cálculo en varias variables, con la excepción de superficies de revolución cuyo tratamiento dado en clase es novedoso, y el cual no es, para nada, considerado en tales textos.

Para el buen desempeño en el curso MA-1003 es necesario tener dominio de los contenidos estudiados en los cursos MA-1001, MA-1002 y MA 1004. Si usted considera que tiene deficiencias en algunos de ellos, es importante que dedique tiempo adicional al estudio de esos conceptos, así como solicitarle a su profesor referencias bibliográficas para el repaso de algún tema o temas en específico.

A lo largo del curso nos guiaremos bajo la premisa de que la matemática se aprende haciéndola y no leyéndola, con esto queremos enfatizar que esperamos de parte del estudiante un compromiso real con el trabajo que demandará el curso, y para ayudar a este fin citamos al filósofo alemán Emmanuel Kant, el cual apuntaba que deberíamos hacernos las siguientes preguntas: ¿Qué puedo saber?, y ¿qué debo hacer?

2. Objetivos generales del curso

- 2.1 Continuar la formación en geometría analítica, optimización y cálculo diferencial e integral de varias variables, haciendo énfasis en las interpretaciones geométricas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .
- 2.2 Continuar la formación en Análisis Vectorial, estudiando las integrales de línea y superficie, y sus teoremas clásicos de Green, Stokes y Gauss.

3. Objetivos Específicos

- 3.1 Interpretar y manipular geoméricamente ecuaciones algebraicas, sistemas de ecuaciones, ecuaciones vectoriales, intersecciones y proyecciones.
- 3.2 Aplicar correctamente la regla de la cadena generalizada a la derivación de funciones compuestas e implícitas y a otros problemas.
- 3.3 Determinar los extremos de funciones de dos o más variables, mediante el criterio del segundo diferencial.
- 3.4 Determinar los extremos de funciones de dos o más variables, sobre conjuntos abiertos y sobre conjuntos cerrados y acotados.
- 3.5 Determinar la naturaleza de un punto estacionario, por medio de los menores principales de la matriz hessiana.
- 3.6 Determinar, usando el método de Lagrange, los extremos de funciones de varias variables con restricciones de igualdad.
- 3.7 Comprender y aplicar las propiedades básicas del cálculo integral en dos y tres dimensiones, directamente o mediante una transformación de coordenadas.

- 3.8 Calcular la integral de campos escalares sobre regiones acotadas del plano y del espacio, tanto directamente, como utilizando cambios de variables.
- 3.9 Calcular integrales de línea y de superficie y aplicarlas a la resolución de problemas relacionados con los teoremas clásicos del análisis vectorial, el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia de Gauss.

4. Actividades de aprendizaje para cumplir los objetivos por parcial

4.1. Para el primer parcial

Para cumplir los objetivos de aprendizaje del primer parcial el estudiante debe:

- Construir, mediante el dibujo de trazas sobre los planos coordenados, la gráfica o intersección de gráficas de superficies cuadráticas.
- Determinar la ecuación de una superficie de revolución, dadas la curva directriz y con eje de rotación en el mismo plano de la curva, haciendo una interpretación geométrica, en casos simples
- Calcular los vectores normal, tangente y binormal de una curva paramétrica en el espacio.
- Determinar la forma paramétrica de la curva de intersección de dos superficies en el espacio, haciendo una interpretación geométrica, en casos simples.
- Calcular las componentes normal y tangencial de la aceleración de un móvil que se desplaza siguiendo una curva paramétrica en el espacio.
- Calcular la longitud de arco de una curva paramétrica en el espacio y hacer uso de la longitud de arco para parametrizar una curva dada.
- Calcular la curvatura y la torsión de una curva paramétrica en el espacio, aportando una interpretación geométrica.
- Aplicar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales hasta orden n de una función de varias variables.
- Aplicar el teorema de la función implícita para calcular las derivadas parciales de una función de varias variables, definida implícitamente por una ecuación o por un sistema de ecuaciones.
- Calcular el gradiente de una función vectorial y la derivada direccional en un punto dado, aportando una interpretación geométrica del resultado.
- Calcular el vector tangente y la derivada a lo largo de una curva, de una función vectorial dada.
- Aplicar las propiedades del vector gradiente y la derivada direccional, en la resolución de problemas de razón de cambio máximo de una función dada.
- Determinar los puntos de máximo, mínimo y puntos de ensilladura de una función de dos variables.
- Determinar los puntos de máximo y mínimo absolutos de una función continua sobre una región cerrada y acotada.

- Determinar los puntos de máximo, mínimo y puntos de ensilladura de una función de varias variables, sin restricciones y con restricciones, aplicando el método de Multiplicadores de Lagrange.
- Aplicar la teoría de extremos de funciones de varias variables, en la resolución de problemas concretos.

4.2. Para el segundo parcial

Para cumplir los objetivos de aprendizaje del segundo parcial el estudiante debe:

- Calcular integrales dobles en coordenadas rectangulares, haciendo una representación gráfica de la región de integración.
- Calcular integrales dobles mediante un cambio de variables, haciendo una representación gráfica de la región de integración en las nuevas variables.
- Aplicar las integrales dobles, al cálculo de áreas y volúmenes, en coordenadas rectangulares o mediante un cambio de coordenadas, haciendo una representación gráfica de la región de integración en las nuevas variables.
- Calcular integrales triples mediante un cambio de variables, haciendo una representación gráfica de la región de integración en las nuevas variables.
- Aplicar las integrales triples al cálculo de volúmenes, en coordenadas rectangulares o mediante un cambio de coordenadas, haciendo una representación gráfica de las regiones de integración.
- Calcular integrales dobles y triples, haciendo previamente un cambio en el orden de integración.
- Aplicar las integrales dobles y triples al cálculo de masas, momentos de inercia y centros de gravedad de cuerpos geométricos.

4.3. Para el tercer parcial

Para cumplir los objetivos de aprendizaje del primer parcial el estudiante debe:

- Calcular integrales de línea a lo largo de una curva suave a trozos.
- Calcular integrales de línea de campos vectoriales sobre curvas suaves.
- Aplicar integrales de línea al cálculo del área bajo una gráfica.
- Aplicar el Teorema de Green en el cálculo de integrales de línea, y en la determinación del área de una región limitada por una curva suave y cerrada simple.
- Determinar la función potencial de un campo conservativo, y aplicarla al cálculo del trabajo realizado por un campo de fuerzas, mediante el teorema fundamental de integrales de línea.
- Calcular integrales de superficie de gráficas, de superficies paramétricas y de campos vectoriales, con proyección sobre cualquier plano.
- Aplicar el Teorema de Stokes para calcular integrales de superficie de campos vectoriales, así como de integrales de línea sobre curvas suaves cerradas y simples.
- Aplicar el Teorema de la Divergencia para calcular integrales de superficie de campos vectoriales, así como de integrales de volumen sobre regiones sólidas cerradas y simples.

5. Contenidos

Aquí se refleja el programa vigente del curso MA-1003.

5.1. Superficies y funciones vectoriales de una variable real

- Rectas y planos en el espacio, secciones cónicas, superficies cuadráticas.
- Cilindros y conos. Superficies de revolución obtenidas al girar una curva plana alrededor de un eje, y que ambos vivan en uno de los planos $x = 0, y = 0, z = 0$.
- Funciones vectoriales de una variable real y ecuaciones paramétricas. Curvas en el espacio. Curvas parametrizadas. Límites y continuidad, derivadas e integrales. Vectores unitarios tangente, normal y binormal. Triedro intrínseco. Curvatura de una curva, torsión. Componentes tangencial y normal de la aceleración.

5.2. Derivación parcial y aplicaciones

- Funciones de varias variables, campos escalares en dos y tres variables.
- Límites y continuidad, derivadas parciales, incrementos y diferenciales. Regla de la cadena.
- Derivadas de funciones definidas implícitamente por una ecuación o por un sistema de ecuaciones.
- Derivadas direccionales y vector gradiente de un campo escalar, derivada direccional a lo largo de una curva. Interpretación geométrica.
- Extremos de funciones de varias variables. Interpretación geométrica.
- Criterio de la segunda derivada para funciones de dos variables.
- Multiplicadores de Lagrange y problemas de extremo condicionado. Interpretación geométrica.
- Clasificación de puntos estacionarios por el método de la fórmula de Taylor, diferenciales de segundo orden y por hessianos orlados. (Este último tópico no se evaluará).

5.3. Integrales múltiples

- Funciones escalonadas y la integral sobre rectángulos, la integral doble de funciones continuas sobre rectángulos, y su evaluación por integrales iteradas.
- Integrales sobre otras regiones cerradas y acotadas de \mathbb{R}^2 , cambio de variables lineales, coordenadas polares, elípticas y otras. Área y volumen mediante integrales dobles.
- Aplicación de las integrales dobles al cálculo de áreas, volúmenes y otros.
- Integrales triples sobre cubos y otras regiones cerradas y acotadas en \mathbb{R}^3 .
- Cambios lineales de variables, coordenadas cilíndricas y esféricas. Integración múltiple sobre \mathbb{R}^3 . Aplicaciones de integrales triples a masas, momentos y centros de masa.

5.4. Análisis Vectorial

- Campos vectoriales. Integrales de línea. Independencia de la trayectoria.
- Teorema de Green.
- Área de una superficie.
- Integrales de superficie.
- Teorema de la divergencia de Gauss.
- Teorema de Stokes.

6. Metodología

Durante las clases se combinarán técnicas expositivas de parte del docente con otra que involucran de una forma más activa a los y las estudiantes, tanto en trabajos individuales como cooperativos.

Las actividades de clase deberán ser complementadas por los y las estudiantes con trabajo individual y estudio en grupo extra clase, así como con el uso eficiente y eficaz de las horas de consulta de los docentes de la cátedra y los recursos tecnológicos que tenga a disposición.

Se considera indispensable una constante práctica de las diferentes técnicas aprendidas en las clases, además de un estudio detallado de los conceptos matemáticos y sus aplicaciones.

La solución de problemas en los que se apliquen los conceptos que se estudian en el curso es fundamental, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y el razonamiento lógico.

7. Pautas de evaluación

La evaluación del curso consistirá de tres exámenes parciales. Este primer semestre del 2018 la Cátedra de MA-1003 ha decidido que el valor de cada parcial sea el mismo, es decir un tercio de la nota final cada uno.

La materia a evaluar en cada uno de los exámenes parciales se indica a continuación:

- Examen I tema a evaluar:

Lo visto desde la semana 1 hasta la semana 6 según cronograma de materia

- Examen II temas a evaluar:

Lo visto desde la semana 8 hasta la semana 11 según cronograma de materia

- Examen III tema a evaluar:

Lo visto desde la semana 13 hasta la semana 15 según cronograma de materia

7.1. CRONOGRAMA DE MATERIA POR PARCIAL

Parcial I	Fecha	Semana	Temas
	13 al 17 de Agosto	1	Secciones cónicas y superficies cuadráticas. Cilindros, conos y superficies de revolución.
	20 al 24 de Agosto	2	Funciones vectoriales. Curvas en el espacio. Triedro intrínseco. Curvatura, componentes tangencial y normal.
	27 al 31 de Agosto	3	Derivadas direccionales. Vector gradiente. Derivada a lo largo de una curva.
	3 al 7 de Setiembre	4	Derivadas parciales. Regla de la Cadena. Funciones Implícitas.
	10 al 14 de Setiembre	5	Extremos de funciones Criterio del discriminante para dos variables. Extremos condicionados.
	17 al 21 de Setiembre	6	Multiplicadores de Lagrange. Diferenciales de segundo orden. Fórmula de Taylor y el método del Hessiano.
	24 al 28 de Setiembre	7	Repaso de la Materia
Parcial II	01 al 05 de Octubre	8	Integrales dobles sobre rectángulos. Integrales dobles sobre regiones generales.
	08 al 12 de Octubre	9	Cambio en el orden de integración. Volúmenes y áreas mediante integrales dobles.
	15 al 19 de Octubre	10	Cambio de variable en integrales dobles. Aplicaciones de las integrales dobles.
	22 al 26 de Octubre	11	Integrales triples Cambio de variable en integrales triples. Aplicaciones.
	29 de Octubre al 02 de Noviembre	12	Repaso de la Materia
Parcial III	05 al 09 de Noviembre.	13	Campos vectoriales. Integrales de línea de campos escalares.
	12 al 16 de Noviembre	14	Integrales de línea de campos vectoriales. Independencia de trayectorias. Teorema de Green. Área de superficie e Integrales de superficie.
	19 al 23 de Noviembre	15	Teorema de Stokes. Teorema de la Divergencia.
	26 al 30 de Noviembre	16	Repaso de la Materia

7.2. CRONOGRAMA DE EXÁMENES

Parciales, Ampliación, y Suficiencia:

Examen	Fecha	Hora inicio
Parcial I	Sábado 29 de Setiembre	1:30 p.m
Parcial II	Sábado 3 de Noviembre	1 p.m.
Parcial III	Miércoles 5 de Diciembre	8 a.m.
Ampliación	Sábado 15 de Diciembre	8 a.m.
Suficiencia	Miércoles 12 de Setiembre	8:30 a.m.

Reposiciones:

Examen	Fecha	Hora inicio
Reposición I	Miércoles 10 de Octubre	7 a.m.
Reposición II	Miércoles 14 de Noviembre	7 a.m.
Reposición III	Viernes 7 de Diciembre	7 a.m

El estudiante que se vea imposibilitado, por razones justificadas, para efectuar una evaluación en la fecha fijada, puede presentar una solicitud de reposición a más tardar cinco días hábiles a partir del momento en que se reintegre a sus estudios. Esta solicitud debe presentarse, en persona, ante el **coordinador** del curso, adjuntando la documentación y las razones por las cuales no pudo efectuar la prueba, con el fin de que el profesor determine, en los tres días posteriores a la presentación de la solicitud, si procede una reposición. Para más información al respecto consultar el artículo 24, capítulo VI del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil.

Las reposición de alguno de los exámenes de reposición será realizada por el profesor del grupo respectivo, previamente comunicado y analizado por el coordinador del curso. De igual forma, la reposición del examen de ampliación la realizará el profesor de cada grupo.

7.3. Examen de Ampliación

Tienen derecho a realizar una prueba de ampliación aquellos estudiantes que obtienen una nota final de 6,0 o de 6,5, según el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil en su artículo 28.

En ese mismo artículo se pone entre paréntesis que dicha prueba de ampliación puede ser un examen, trabajo, práctica o prueba especial.

En Cálculo III se ha utilizado históricamente la opción de un examen. Este examen ha sido fundamentalmente de dos tipos: el primero donde se presentan cinco o seis preguntas y el estudiante debe trabajarlas todas para obtener una nota de 70, al menos. La segunda opción es más reciente y se presenta una prueba donde el estudiante debe realizar las preguntas de los parciales donde obtuvo una nota menor que 70.

Para este semestre el examen puede ser cualesquiera de las dos opciones que se han señalado en el párrafo anterior, y para ayudar en la preparación de dicho examen se subirá a nuestro sitio Moodle, en la semana 17, un documento con las soluciones de todos los parciales ordinarios del II semestre 2018, y además muestras de ampliaciones de semestres anteriores.

8. Información General

8.1. Generalidades sobre normativa

Este es un curso de cuatro créditos. Según lo establecido en el **CONVENIO PARA UNIFICAR LA DEFINICIÓN DE CRÉDITO EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR DE COSTA RICA** un crédito es una unidad valorativa que exige un trabajo de tres horas reloj por parte del estudiante.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede concluir que como este curso es de 4 créditos hay un total de 12 horas reloj semanales de trabajo por parte del estudiante. Por lo tanto, debe el estudiante dedicar 7 horas reloj de trabajo semanal a este curso.

Debe tenerse presente el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil el cual norma los procedimientos de evaluación y orientación académica de las diversas categorías de estudiantes de la UCR. Nos interesa indicarle que el capítulo V en sus artículo 14 y 15 trata sobre la administración de los cursos. En el capítulo VI se abordan las normas de evaluación. Los detalles los puede encontrar en la siguiente dirección electrónica <http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/>

8.2. Coordinación

El coordinador del curso es el profesor José Rosales Ortega, oficina 314 del nuevo edificio de Matemática. Las horas de atención serán los Viernes de 9:20 a.m. a 11:50 a.m. Cualquier situación que deseen consultar con respecto al curso por favor contactarlo en su oficina o bien escribiéndole al correo rosalesortega@gmail.com

8.3. Pizarra del curso y Sitio Moodle

El curso cuenta con una pizarra de información ubicada en el segundo piso del edificio de Física y Matemática. La información que indique el lugar(las aulas) donde se efectuarán las pruebas será puesta en esta pizarra con al menos cinco días hábiles de antelación, en cumplimiento de lo establecido en el artículo 18, inciso c) del reglamento de régimen académico estudiantil.

Además se cuenta con la página de la Escuela de Matemática www.emate.ucr.ac.cr donde se estará exhibiendo la información relativa a los exámenes parciales y sus respectivas reposiciones.

En la misma página de la escuela puede ingresar al sitio Moodle y allí en la parte de matemáticas aplicadas encontrará la página de nuestro curso donde usted podrá encontrar información importante para cada uno de los parciales.

8.4. Material disponible

Durante el curso se pondrán a disposición listas de ejercicios que contienen preguntas evaluadas en exámenes antiguos, así como ejercicios sugeridos del libro de Pita Ruiz. Estas listas estarán disponibles en algunos lugares que se darán a conocer por parte de los profesores que conforman la cátedra. Además en la plataforma Moodle, de la Escuela de Matemática, se contará con material del curso.

No debe olvidarse que se cuenta con el programa llamado **Estudiaderos**. Este programa se reúne los días miércoles en el aula 102 FM y allí puede encontrar estudiantes avanzados evacuando

dudas de las diferentes materias de matemáticas para ingeniería. Los horarios van de 8 a.m hasta las 5 p.m.

En el CASE se pueden encontrar copias de exámenes de semestres anteriores del curso.

Se indica también que en caso de que no pueda asistir a las horas de consulta de su profesor puede asistir a consulta con cualquier otro profesor que integre la cátedra de cálculo III. El horario de consulta de cada profesor de la cátedra se colocará en la pizarra del curso apenas cada profesor lo haya establecido.

Por último se indica que existe un proyecto de la escuela de Ingeniería Industrial donde se da apoyo para el fortalecimiento de cursos, uno de tales es cálculo III. Estos cursos se imparten en la sede Rodrigo Facio, en la sede Interuniversitaria de Alajuela, y en la sede Regional de Occidente. Para obtener horarios e información escribir a cursosfortalecimiento.eii@ucr.ac.cr

8.5. Fechas a tomar en cuenta

Algunas fechas a tener en cuenta en el semestre son las siguientes:

- El semestre va del Lunes 13 de Agosto al Viernes 30 de Noviembre.
- El día Miércoles 15 de Agosto, día de la Madre.
- El día del Encuentro de Culturas será el Lunes 15 de Octubre.

9. Bibliografía

El libro de referencia para el curso se puede obtener en la siguiente dirección:

<https://educacionmatematicaula.files.wordpress.com/2014/12/claudio-pita-ruiz-calculo-vectorial-prentice-hall-primera-edicion-3b3n-1995.pdf>

El libro del profesor Ávila provee un curso en el mismo sabor de los exámenes de cálculo III.

El libro del profesor Mora es una valiosa adición a la literatura ya que ayuda al estudiante a visualizar superficies usando Mathematica. Disponible en la siguiente dirección:

<https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/CDFindex.html>

1. Apostol, T.: Calculus. Segunda edición, Vol. I y II. Editorial Reverté, España (1980)
2. Ávila Herrera, Juan Félix. Cálculo en varias variables. Editorial UCR. 2017
3. Pita Ruiz, C.: Cálculo Vectorial. Primera Edición. Pearson Educación, México (1995).
4. Demidovich, B.: Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial Paraninfo, Madrid (1982).
5. Demidovich, B.: 5000 Problemas de Análisis Matemático. Editorial Paraninfo, Madrid (1985).
6. Edwards, H. y David Penney: Cálculo con trascendentes tempranas. Editorial Pearson, México (2008).
7. Mora, Walter: Cálculo en Varias Variables.
8. Marsden, J., Tromba, A.: Cálculo Vectorial. Quinta edición, Pearson Educación, Madrid (2004).

9. Rogawski, J.: Cálculo: varias variables. Segunda edición, Editorial Reverté, Barcelona (2012).
10. Stewart, J.: Cálculo Multivariable. Cuarta edición, Thomson Learning, México, D.F. (2004).
11. Thomas, G.: Cálculo en Varias Variables. Decimosegunda edición. Pearson Educación, México, D.F. (2008).
12. Walker, M., Apuntes del curso MA-1003². <http://apuntesmiguel.net/MA1003.html>

²Una excelente fuente sobre tópicos y ejercicios del curso MA-1003

10. Profesores del curso

GRUPO	HORARIO	AULA	PROFESOR
01	L 07:00 a 09:50 J 07:00 a 08:50	L 403-IN, J 409-IN	William Alvarado
02	L 07:00 a 08:50 J 07:00 a 09:50	L 504-FC, J 504-FC	Mark Villarino
04	L 10:00 a 12:50 J 11:00 a 12:50	L 203-IN, J 203-IN	Dario Mena
05	L 13:00 a 15:50 J 13:00 a 14:50	L 102-IN, J 502-IN	Mark Villarino
06	L 13:00 a 14:50 J 13:00 a 15:50	L 403-IN, J 403-IN	Fabián Mora
07	L 16:00 a 18:50 J 17:00 a 18:50	L 207-AG, J 207-AG	Marco Alfaro
08	K 07:00 a 09:50 V 07:00 a 08:50	K 205-FC, V 205-FC	Christian Fonseca
09	K 07:00 a 08:50 V 07:00 a 09:50	K 220-FM, V 504-FC	Eugenio Chinchilla
11	K 11:00 a 12:50 V 10:00 a 12:50	K 405-IN, V 405-IN	Eugenio Chinchilla
12	K 13:00 a 15:50 V 13:00 a 14:50	K 405-IN, V 405-IN	Marco Alfaro