



# MA-1004: Álgebra Lineal

CARTA AL ESTUDIANTE, II SEMESTRE 2019<sup>‡</sup>

**Descripción del curso:** El estudio de la naturaleza de los sistemas de ecuaciones lineales es desarrollado para hacer frente a los desafíos que implican disciplinas como la economía, la ingeniería y la computación. Esto se podría ver reflejado en la manipulación de bases de datos para cálculos de riesgos financieros o predicciones climáticas, cuyas dimensiones están más allá de la capacidad de cálculo humana. Tales mecanismos usan técnicas derivadas de la identificación de propiedades matemáticas de la entidad conceptual que generaliza la noción de sistemas de ecuaciones: las transformaciones lineales entre espacios vectoriales. De hecho, las soluciones de estos sistemas se pueden ver como parte de las características de funciones especiales que preservan las relaciones lineales entre los elementos del dominio y codominio. Toda esta teoría matemática se engloba dentro del campo de estudio llamado: álgebra lineal.

Este curso pretende dar al estudiante la maquinaria del álgebra lineal necesaria para poder hacer frente a cursos avanzados de su respectiva carrera, basada en los siguientes ejes teóricos: las matrices, los sistemas de ecuaciones lineales, los espacios vectoriales y las transformaciones lineales. Así, al final del curso el estudiante será capaz de indentificar y entender las aplicaciones del álgebra lineal en su respectivo campo, cuando llegue el momento.

MA-1004 tiene un nivel medio de dificultad y requiere que el estudiante dedique suficiente tiempo para comprender y asimilar los diferentes conceptos y resultados teóricos estudiados en clase. Además, es necesario una importante dedicación a la resolución de ejercicios por parte del estudiante. Para fortalecer el estudio de este, curso todos los profesores de la cátedra contamos con horas de oficina destinadas a atender las consultas de los estudiantes de MA-1004.

## Sigla

MA-1004

## Naturaleza

Teórico-Práctico

## Horas P./E. I.<sup>†</sup>

5 / 10 Horas

## Modalidad

Semestral

## Créditos

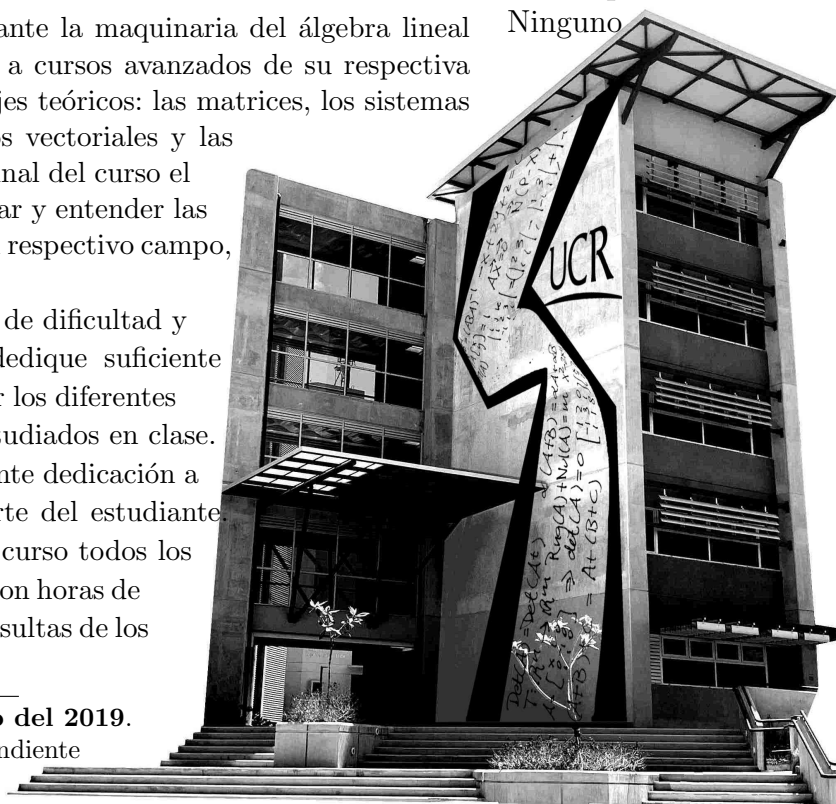
3

## Requisito

Ingreso a Carrera

## Correquisito

Ninguno



<sup>‡</sup>Versión actualizada al 12 de agosto del 2019.

<sup>†</sup>Horas Presenciales / Estudio Independiente

# 1. Objetivos generales

[1] Contribuir a la formación matemática del estudiante y desarrollar la habilidad para interpretar y deducir resultados analíticamente del álgebra lineal, para describir, entender y resolver problemas propios de su disciplina.

[2] Fomentar el uso correcto del lenguaje matemático y desarrollar la habilidad de expresar ideas de manera rigurosa y coherente.

[3] Dominar los principales temas introductorios del álgebra lineal.

# 2. Objetivos específicos

[1] Aplicar algoritmos convenientes para resolver y expresar, de forma adecuada, el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales.

[2] Conocer el álgebra de matrices y cálculo de determinantes, y aplicarlo adecuadamente a la solución de los sistemas de ecuaciones lineales.

[3] Conocer y aplicar la geometría vectorial a diferentes tipos de problemas.

[4] Identificar  $\mathbb{R}^n$  como un espacio vectorial con producto interno, conocer su geometría y poder generalizar los conceptos de línea, recta y plano.

[5] Conocer y aplicar las propiedades básicas del producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ .

[6] Conocer la estructura de espacio vectorial y comprender  $\mathbb{R}^n$  a partir de ello.

[7] Conocer ejemplos de espacios vectoriales relacionados con matrices y polinomios.

[8] Determinar si un conjunto de vectores es una base y obtener una base ortogonal a partir de una base dada.

[9] Determinar el complemento ortogonal de un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .

[10] Identificar los espacios vectoriales de dimensión fi-

nita de  $\mathbb{R}^n$ .

[11] Conocer las propiedades básicas de las transformaciones lineales y su relación con el álgebra de matrices.

[12] Determinar si una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  es una transformación lineal y representar una transformación lineal de este tipo, mediante una matriz.

[13] Determinar transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita.

[14] Determinar bases para el núcleo y la imagen de una transformación lineal.

[15] Representar una transformación lineal mediante una matriz con respecto a bases dadas de su dominio y codominio.

[16] Determinar matrices de cambio de bases y relacionarlas con la representación matricial de una transformación lineal.

[17] Obtener los valores propios de una matriz y los espacios propios asociados a cada valor propio.

[18] Determinar si una matriz o transformación lineal, es diagonalizable o no.

[19] Aplicar la teoría de diagonalización al estudio de las curvas cuadráticas en dos y tres variables.

# 3. Actividades para cumplir objetivos

[1] Para cumplir los objetivos del 1 al 3 el estudiante debe repasar las propiedades de los números reales, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en dos variables, así como el tema de factorización.

[2] Para cumplir los objetivos del 4 al 11 el estudiante debe repasar la suma de vectores, además los temas de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, álgebra matricial y determinantes.

[3] Para cumplir los objetivos del 12 al 17 el estudiante debe revisar el concepto de función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Además se deben manejar con solvencia los temas anteriores.

[4] Para cumplir los objetivos del 18 al 20 el estudiante debe repasar la teoría sobre cónicas y tener presente todo lo visto anteriormente.

## 4. Programa

El curso MA-1004 consta de 10 temas principales.

### [Tema 1] **Matrices**

Concepto general de una matriz. Tipos de matrices: cuadrada, diagonal, identidad, triangular, simétrica, antisimétrica, vector columna y vector fila. Álgebra elemental de matrices: suma, productora escalar y multiplicación. Propiedades básicas del álgebra de matrices.

### [Tema 2] **Sistemas de ecuaciones lineales**

Sistemas de  $n$  ecuaciones lineales en  $m$  variables homogéneos y no homogéneos. Solución y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Matriz de coeficientes y matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales. Operaciones elementales sobre las filas de una matriz. Matrices equivalentes por filas. Sistemas equivalentes y su relación con las operaciones elementales sobre las filas de una matriz. Forma escalonada y forma escalonada reducida. Rango de una matriz. Método de reducción de Gauss-Jordan. Solución de un sistema de ecuaciones lineales que depende de uno o más parámetros. Sistemas consistentes, inconsistentes, con solución única y con infinitas soluciones.

### [Tema 3] **Matrices invertibles**

Inversa de una matriz y matrices invertibles. Método de Gauss-Jordan para hallar la inversa de una matriz. Matrices invertibles y sistemas lineales. Matrices elementales y matrices inversas. Matrices idempotentes y nilpotentes. Matriz transpuesta y sus propiedades.

### [Tema 4] **Determinantes**

Definición de determinante de una matriz  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  y sus propiedades elementales. Menores y cofactores de una matriz  $n \times n$ . Cálculo del determinante de una matriz triangular. Determinante de una matriz invertible. Determinante de la transpuesta de una matriz. Cálculo de determinantes aplicando operaciones elementales sobre las filas y/o columnas de matriz. Regla de Cramer. Cálculo de la inversa de una matriz usando la matriz adjunta. Relación entre el rango de una matriz y su determinante.

### [Tema 5] **Geometría vectorial**

Representación geométrica de un vector. Suma y producto escalar de vectores. Norma de un vector. Ángulo entre dos vectores. Producto cruz en  $\mathbb{R}^3$  y cálculo de áreas y volúmenes. Proyecciones ortogonales en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ . Combinación lineal de un conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^n$ .

### [Tema 6] **Rectas y planos**

Descripción de una recta en  $\mathbb{R}^n$ . Ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de rectas en  $\mathbb{R}^3$ . Planos en  $\mathbb{R}^3$ . Ecuación vectorial, normal y cartesiana de planos

en  $\mathbb{R}^3$ . Hiperplanos en  $\mathbb{R}^n$ . Distancia entre dos puntos, entre un punto y una recta, entre dos rectas, entre un punto y un plano, y entre dos planos.

### [Tema 7] **Espacios vectoriales**

Definición y propiedades básicas de los espacios vectoriales. Ejemplos de espacios vectoriales, incluyendo espacios de matrices y polinomios. Subespacio vectorial. Combinación lineal de un conjunto de vectores de un espacio vectorial. Dependencia e independencia lineal. Conjunto generador de un espacio vectorial. Bases y dimensión de un espacio vectorial. Coordenadas de un vector con respecto a una base ordenada. Espacio fila y espacio columna de una matriz. Intersección y suma de subespacios vectoriales.

### [Tema 8] **Transformaciones lineales**

Concepto de transformación lineal. Determinación de una transformación lineal por su acción sobre una base. Núcleo e imagen de una transformación lineal. Inyectividad y sobreyectividad de una transformación lineal. Relación entre las dimensiones del dominio, el núcleo y la imagen de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Transformación lineal asociada a una matriz. Espacio nulo y espacio imagen de una matriz. Composición de transformaciones lineales y producto de matrices. Matriz de cambio de base. Transformaciones lineales invertibles. Rotaciones y reflexiones.

### [Tema 9] **Ortogonalidad**

Conjuntos, bases y subespacios ortogonales. Bases ortonormales. Complemento ortogonal. Proyección ortogonal sobre un subespacio. Ortonormalización de Gram-Schmidt.

### [Tema 10] **Diagonalización**

Concepto de valor y vector propio. Subespacio asociado a un valor propio. Polinomio característico de una matriz. Multiplicidad algebraica y geométrica. Matriz diagonalizable. Diagonalización de matrices. Matrices ortogonalmente diagonalizables. Valor y vector propio de un operador lineal. Diagonalización de operadores lineales. Operadores lineales ortogonalmente diagonalizables.

### [Tema 11] **Curvas y superficies cuadráticas**

Secciones cónicas: parábolas, elipses e hipérbolas. Ecuaciones canónicas de las curvas y superficies cuadráticas. Formas cuadráticas en general y sus matrices asociadas. Diagonalización de formas cuadráticas asociadas a curvas y superficies cuadráticas. Rotación y traslación de las secciones cónicas, además de conocer sus ejes principales y su ángulo de rotación.

## 5. Cronograma

Esta es una posible distribución de temas por semanas; cada profesor puede seguir un orden distinto siempre y cuando se cubran los temas para cada examen.

Semana	Fecha	
1	12 Ago al 17 Ago	Tema 1: Matrices
2	19 Ago al 24 Ago	Tema 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales
3	26 Ago al 31 Ago	Tema 3 : Matrices Invertibles
4	02 Sep al 07 Sep	Tema 4 : Determinantes
5	09 Sep al 14 Sep	Tema 5 : Geometría Vectorial
6	16 Sep al 21 Sep	REPASO

**I Parcial Sábado 21 de Septiembre 1pm [Temas 1, 2, 3, 4 y 5]**

**Reposición I P. Miércoles 02 de Octubre 8am**

7	23 Sep al 28 Sep	Tema 6 : Rectas y Planos
8	30 Sep al 05 Oct	Tema 7: Espacios Vectoriales
9	07 Oct al 12 Oct	Tema 7: Espacios Vectoriales
10	14 Oct al 19 Oct	Tema 8: Transformaciones
11	21 Oct al 26 Oct	Tema 8: Transformaciones
12	28 Oct al 02 Nov	Tema 9 : Ortogonalidad (Tema del Tercer Parcial)
13	04 Nov al 09 Nov	REPASO

**II Parcial Sábado 09 de Noviembre 8am [Temas 6, 7 y 8]**

**Reposición II P. Miércoles 20 de Noviembre 8am**

14	11 Nov al 16 Nov	Tema 10 : Diagonalización
15	18 Nov al 23 Nov	Tema 11 : Curvas Cuadráticas
16	25 Nov al 30 Nov	REPASO

\*\*\* Fin de Lecciones II-Semestre 2019 \*\*\*

**III Parcial Lunes 02 de Diciembre 8am [Temas 9, 10 y 11]**

**Reposición III P. Miércoles 04 de Diciembre 8am**

**Ampliación Jueves 12 de Diciembre 8am**

Otros días feriados:

- Semana 1, Jueves **15 de Agosto**: Día de la Madre.
- Semana 5, Domingo **15 de Septiembre**: Día de la Independencia.
- Semana 9, Sábado **12 de Octubre**: Día de las Culturas.

## 6. Evaluación

Se realizarán tres exámenes parciales, cada uno con el mismo valor porcentual ( $\frac{10}{3}$ ). La suma de los tres resultados da la nota de aprovechamiento **NA**. Cada examen tendrá una duración de tres horas. Si el estudiante tiene derecho a un examen de ampliación, éste evaluará los temas de los exámenes en que el estudiante no sacó nota superior o igual a 7.0. Si el estudiante debe presentar para  $n$  parciales, entonces tendrá  $n$  horas de tiempo para resolver el examen de ampliación (donde  $n$  puede ser 1, 2 ó 3).

## 7. Calendario de exámenes

Las fechas de las pruebas parciales (sujetas a la disponibilidad de aulas) son las siguientes:

	Fecha	Hora
<b>Suficiencia</b>	Miércoles 11 de Septiembre	9 am
<b>I Parcial</b>	Sábado 21 de Septiembre	1pm
Reposición I Parcial	Miércoles 02 de Octubre	8am
<b>II Parcial</b>	Sábado 09 de Noviembre	8am
Reposición II Parcial	Miércoles 20 de Noviembre	8am
<b>III Parcial</b>	Lunes 02 de Diciembre	8am
Reposición III Parcial	Miércoles 04 de Diciembre	8am
<b>Ampliación</b>	Jueves 12 de Diciembre	8am

## 8. Reporte de nota final

Para efectos de promoción rigen los siguientes criterios, los cuales se refieren a la nota de aprovechamiento **NA**, expresada en una escala de 0 a 10, redondeada, en enteros y fracciones de media unidad, según la reglamentación vigente:

- Si  $NA \geq 6,75$  el estudiante gana el curso.
- Si  $5,75 \leq NA < 6,75$ , el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación, en el cual se debe obtener una nota superior o igual a 7,0 para aprobar el curso con nota 7,0, en caso contrario su nota sera 6,0 o 6,5, la más cercana a **NA**.
- Si  $NA < 5,75$  pierde el curso.

La calificación final del curso se notifica a la **Oficina de Registro e Información**, en la escala de cero a diez, en enteros y fracciones de media unidad.

## 9. Metodología y Recursos

En las clases se utiliza la técnica expositiva con posibilidad de involucrar a los estudiantes y si es posible, usar recursos tecnológicos. Las clases se deben de complementar con trabajo individual por parte del estudiante para resolución de ejercicios y asimilación de la materia.

En la plataforma institucional **Mediación Virtual** <sup>§</sup>, bajo el nombre I-S-2019-RRF-Cátedra de Álgebra Lineal-000, se encuentra la página del curso MA-1004. En ese sitio se publicarán anuncios pertinentes al curso, y además, se pueden encontrar documentos útiles como prácticas, exámenes de semestres anteriores, la carta al estudiante, notas de clase, etc. Algunos profesores tienen su propia página

por grupo en esta misma plataforma con modalidad virtual baja. Para ingresar a esta plataforma, se debe usar la información del correo institucional **nombreapellidos@ucr.ac.cr**.

Se recomiendan como libros guía de MA-1004, libro resumen de la cátedra de álgebra lineal: **MA1004: Álgebra Lineal** (ver [Sán19]), el libro de la editorial UCR: **Álgebra Lineal** (ver [ACG14]) y el libro **Álgebra Lineal** de S. Grossman (ver [GF12]). Además, la página de **Mediación Virtual** se pueden encontrar otros documentos complementarios, como exámenes de semestres pasados y compendios de ejercicios resueltos.

## 10. Detalles sobre evaluaciones y horas de consulta

[1] **Horas de consulta y horarios:** En la pizarra de MA 1004, ubicada en el pasillo del segundo piso de Física y Matemática, en la página de **Mediación Virtual** del curso y en la página de la Escuela de Matemática (**emate.ucr.ac.cr**) se publicará información sobre: distribución de aulas para exámenes, horarios, horas de consulta, etc.

[2] **Uso de calculadoras:** En los exámenes no se permite el uso de teléfonos ni de ningún otro aparato electrónico diferente a una calculadora no programable.

[3] **Disposiciones para la realización de las evaluaciones:** Los exámenes son de cátedra y su resolución es individual. Cualquier intento de copiar en el examen será sancionado con base en lo que establece la reglamentación vigente. El estudiante debe presentarse puntualmente el día del

examen en el aula que fue asignada. No se permiten los cambios de grupo, todo estudiante debe realizar las evaluaciones en el grupo en que está matriculado. Además, el estudiante debe traer un cuadernillo de examen y bolígrafo de tinta azul o negra, no se permitirán hojas sueltas adicionales. También es indispensable portar algún tipo de identificación (cédula, licencia de conducir o carné universitario con foto, vigentes) de lo contrario no podrá efectuar la prueba.

[4] **Exámenes de reposición:** Aquellos estudiantes con ausencia justificada a un examen de cátedra, tales como enfermedades (con justificación médica), o choques de exámenes (con constancia la coordinación respectiva), o casos de giras (reportados por escrito) y con el visto bueno del órgano responsable, podrán realizar el

examen de reposición, siempre que **llenen la boleta de justificación** (se pide en la secretaría de la Escuela de Matemática), adjunten la respectiva constancia y la depositen en el casillero del coordinador de MA-1004 (**casillero 150**, segundo piso FM), en los cinco días hábiles siguientes después de realizada la prueba.

[5] **Calificación de exámenes:** El profesor debe entregar a los alumnos los exámenes calificados y sus resultados, a más tardar **10 días hábiles** después de haberlos efectuados, de lo contrario, el estudiante podrá presentar reclamo ante la dirección de la Escuela de Matemática.

[6] **Más detalles** de los puntos anteriores y otros (como pérdida de exámenes, reclamos) el estudiante puede consultar el **Reglamento de Régimen Académico Estudiantil** <sup>‡</sup>.

## 11. Objetivos de evaluación

[1] **Matrices:**

[1.1] Reconocer una matriz, sus características, componentes y poder clasificarla como cuadrada, diagonal, etc.

[1.2] Realizar las principales operaciones del álgebra de matrices. Conocer y aplicar sus propiedades.

[2] **Sistemas de ecuaciones lineales:**

[2.1] Determinar si una ecuación dada es

lineal o no, respecto de las variables involucradas.

[2.2] Identificar la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales.

[2.3] Escribir un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial (matriz aumentada).

[2.4] Aplicar operaciones elementales a las filas de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales para obtener el conjunto solución del sistema.

[2.5] Expresar, adecuadamente, el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

[2.6] Calcular la forma escalonada reducida de una matriz.

[2.7] Determinar si dos matrices dadas son equivalentes por filas.

[2.8] Determinar el rango fila de una matriz.

[2.9] Determinar si un sistema de ecuaciones lineales es inconsistente, comparando

<sup>§</sup><https://mediacionvirtual.ucr.ac.cr>

<sup>‡</sup>[http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen\\_academico\\_estudiantil.pdf](http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen_academico_estudiantil.pdf)

los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada del sistema.

[2.10] Estudiar sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes y determinar condiciones algebraicas sobre los coeficientes para que el sistema sea inconsistente, o tenga solución única, o tenga infinitas soluciones.

### [3] Matrices invertibles

[3.1] Conocer el concepto inversa de una matriz y determinar en que casos una matriz tiene inversa, y calcularla.

[3.2] Conocer y aplicar las propiedades de la trasposición de matrices en relación con la suma y el producto de matrices y la multiplicación por escalar.

[3.3] Resolver ecuaciones matriciales, aplicando las propiedades algebraicas de la suma y la multiplicación, de la transposición y de la inversión de matrices.

[3.4] Identificar el producto de una matriz por un vector columna como una combinación lineal de las columnas.

[3.5] Determinar si un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene solución única y/o hallando el rango de la matriz asociada y relacionarlo con independencia vectorial.

### [4] Determinantes

[4.1] Calcular el determinante de matrices y conocer sus propiedades.

[4.2] Aplicar operaciones elementales sobre las filas o columnas de una matriz para llevarla a forma triangular y calcular su determinante.

[4.3] Conocer y aplicar la linealidad por filas (columnas) del determinante de una matriz.

[4.4] Conocer y aplicar las propiedades del determinante respecto a la multiplicación y la trasposición de matrices.

[4.5] Calcular el determinante de una matriz inversa.

[4.6] Determinar, calculando el determinante, si una matriz cuadrada dada es invertible o no.

[4.7] Conocer y aplicar la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales  $n \times n$  y matriz de coeficientes invertible. Cálculo de la inversa de una matriz usando la matriz adjunta.

### [5] Geometría vectorial

[5.1] Reconocer una combinación lineal de un conjunto de vectores en  $\mathbb{R}$  e interpretar flechas entre puntos de  $\mathbb{R}^n$  como vectores.

[5.2] Interpretar geoméricamente la suma de dos vectores y el producto de un escalar por un vector.

[5.3] Calcular el producto punto de dos vectores, la norma de un vector y el ángulo formado por dos vectores.

[5.4] Determinar la proyección ortogonal de un vector sobre otro.

[5.5] Calcular el producto cruz de dos vectores en  $\mathbb{R}^3$  y usarlo para calcular áreas y volúmenes simples.

[5.6] Interpretar el valor absoluto del de-

terminante de una matriz  $3 \times 3$  como el volumen del paralelepípedo formado por sus vectores fila.

### [6] Geometría vectorial

[6.1] Determinar ecuación vectorial, paramétrica y simétrica para una línea recta en  $\mathbb{R}^3$ .

[6.2] Determinar ecuación vectorial y normal para un plano  $\mathbb{R}^3$ .

[6.3] Generalizar el concepto de ecuación normal para un plano al de hiperplano.

[6.4] Determinar intersecciones entre dos líneas rectas, entre una línea recta y un plano y entre dos planos.

### [7] Espacios vectoriales

[7.1] Reconocer la estructura de espacio vectorial en diferentes contextos y determinar si un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio vectorial.

[7.2] Reconocer subespacios formados por las combinaciones lineales de un conjunto finito de vectores de un espacio vectorial.

[7.3] Conocer la intersección y la suma de subespacios vectoriales.

[7.4] Hallar un conjunto generador de vectores de un subespacio vectorial.

[7.5] Determinar condiciones para que un conjunto de vectores, que dependen de uno o más parámetros, sea linealmente independiente.

[7.6] Conocer el concepto de base y dimensión de un espacio vectorial.

[7.7] Hallar bases para los espacios fila y columna de una matriz.

[7.8] Hallar bases para subespacios generados por un conjunto de vectores conocidos.

[7.9] Determinar las coordenadas de un vector de un espacio vectorial, con respecto a una base fija.

### [8] Transformaciones lineales

[8.1] Conocer el concepto de transformación lineal y sus propiedades básicas.

[8.2] Determinar si una función dada entre dos espacios vectoriales es una aplicación o transformación lineal.

[8.3] Reconocer los subespacios núcleo e imagen de una transformación lineal y obtener sus bases.

[8.4] Determinar completamente una transformación lineal a partir de las imágenes de los elementos de una base de su dominio.

[8.5] Determinar si una transformación lineal es inyectiva o sobreyectiva.

[8.6] Conocer y aplicar la relación entre las dimensiones del dominio, el núcleo y la imagen de una transformación lineal.

[8.7] Conocer que la suma, la multiplicación por escalar y la composición de transformaciones lineales.

[8.8] Reconocer que toda matriz de dimensión  $m \times n$  en determina una transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ .

[8.9] Obtener una representación matricial para una transformación lineal dada de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  con respecto a las ba-

ses canónicas, e identificar la acción de la transformación lineal como una multiplicación de una matriz por un vector.

[8.10] Obtener una representación matricial para una transformación lineal dada de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  respecto a bases dadas para el dominio y el producto de matrices.

[8.11] Reconocer una representación matricial de la transformación identidad, como una matriz de cambio de base.

[8.12] Obtener distintas representaciones matriciales de una transformación lineal, mediante multiplicación por matrices de cambio de base.

[8.13] Determinar si una transformación lineal es invertible y obtener la transformación lineal inversa.

[8.14] Conocer la relación entre transformaciones lineales invertibles y matrices invertibles, y aplicarlo para obtener inversas.

### [9] Ortogonalidad

[9.1] Reconocer conjuntos ortogonales u ortonormales de un espacio vectorial con producto interno.

[9.2] Determinar el complemento ortogonal de un subespacio dado.

[9.3] Obtener la proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio vectorial.

[9.4] Obtener una base ortonormal a partir de una base dada de un subespacio usando ortogonalización de Gram-Schmidt.

### [10] Diagonalización:

[10.1] Identificar los valores propios de una matriz cuadrada, determinar los espacios propios correspondiente y obtener una base para cada uno de ellos.

[10.2] Identificar la multiplicidad algebraica y geométrica de un valor propio.

[10.3] Determinar si una matriz dada  $A$  o una transformación lineal es diagonalizable (o si es el caso, ortogonalmente diagonalizable) y en caso que lo sea obtener una matriz invertible (si es el caso, ortogonal)  $C$  tal que  $C^{-1}AC$  sea diagonal.

[10.4] Conocer que una matriz real es ortogonalmente diagonalizable si y solo si es simétrica.

### [11] Curvas y superficies cuadráticas

[11.1] Conocer las formas cuadráticas de las principales curvas y superficies cuadráticas.

[11.2] Expresar una forma cuadrática por una matriz simétrica.

[11.3] Usar la diagonalización ortogonal para obtener un cambio de variable lineal apropiado que elimine los términos mixtos de la forma cuadrática de las curvas y superficies estudiadas, e identificar el tipo de curva o superficie.

[11.4] Dibujar las curvas o superficies cuadráticas, determinar y dibujar los ejes asociados a los cambios de variable y calcular el ángulo de rotación.

## 12. Profesores y grupos de MA-1004

Grupos	Horario	Aula	Profesor(a)
1	L 07:00-09:50, J 07:00-08:50	401 CS, 213 FM	Jesús Sánchez
2	L 07:00-08:50, J 07:00-09:50	215 FM, 220 FM	María A. Lara
3	L 11:00-12:50, J 10:00-12:50	304 IN	Jorge Esquivel
4	L 10:00-12:50, J 11:00-12:50	501 IN	Ronald Zúñiga
5	L 10:00-12:50, J 11:00-12:50	212 FM, 104 MI	Andy Alvarado
6	L 13:00-14:50, J 13:00-15:50	504 IN	María A. Lara
7	L 13:00-14:50, J 13:00-15:50	102 FM, 204 FC	Federico Mora
8	L 13:00-15:50, J 13:00-14:50	405 IN	Miguel Alpízar
9	L 16:00-18:50, J 17:00-18:50	302 IN	Marco Alfaro
10	K 07:00-08:50, J 07:00-09:50	404 IN	Marco Antei
11	K 07:00-09:50, V 07:00-08:50	304 IN	Félix Núñez
12	K 10:00-12:50, V 11:00-12:50	304 IN	Marco Alfaro
13	K 11:00-12:50, V 10:00-12:50	405 IN	Ronald Zúñiga
14	K 10:00-12:50, V 11:00-12:50	608 CS	Jorge Esquivel
15	K 13:00-15:50, V 13:00-14:50	305 IN	Andy Alvarado
16	K 13:00-15:50, V 13:00-14:50	405 IN	Carlos Azofeifa
17	K 13:00-14:50, V 13:00-15:50	504 FC, 213 FM	Miguel Alpízar
19	L 07:00-09:50, J 07:00-08:50	501CS, 102FM	Jimmy Calvo
20	L 11:00-12:50, J 10:00-12:50	207FC	Jimmy Calvo

□ **Coordinación de la Cátedra de MA-1004:** Jesús Sánchez, [jesus.sanchez\\_g@ucr.ac.cr](mailto:jesus.sanchez_g@ucr.ac.cr), oficina 411-II FM, casillero 150 (edificio de Física-Matemáticas).

## Referencias

- [ACG14] C. Arce, W. Castillo, and J. González. *Álgebra lineal*. Editorial UCR, 2014.
- [Ant04] H. Anton. *Introducción al álgebra lineal*. Limusa, México, 2004. =
- [Arc14] C. Arce. *Ejercicios resueltos de álgebra lineal*. Editorial UCR, 2014.
- [Ger92] H. Gerber. *Álgebra lineal*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1992.
- [GF12] S. Grossman and J. Flores. *Álgebra lineal*. McGraw Hill, 2012.
- [Gol80] L. Golovina. *Álgebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones*. Mir, Moscú, 1980.
- [Mal72] A. Maltsev. *Fundamentos de Álgebra Lineal*. Mir, Moscú, 1972.
- [Sán19] J. Sánchez. *MA1004: Álgebra Lineal*. En revisión, 2019.
- [Str06] G. Strang. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Ediciones Paraninfo, 2006.

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Costa Rica  
Sede Rodrigo Facio  
Tel: (506) 2511-6555  
<http://www.emate.ucr.ac.cr>  
[aplicada.em@ucr.ac.cr](mailto:aplicada.em@ucr.ac.cr)