

Universidad de Costa Rica  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemática  
Dpto. de Matemática Aplicada  
II Ciclo 2019

## Carta al estudiante

### Información general

<b>Nombre del curso:</b>	Cálculo para Ciencias Económicas II
<b>Sigla:</b>	MA-1022
<b>Temas generales:</b>	Álgebra lineal y cálculo diferencial en varias variables
<b>Naturaleza del curso:</b>	Teórico
<b>Horas presenciales:</b>	5
<b>Horas personales:</b>	7
<b>Modalidad:</b>	Semestral
<b>Créditos:</b>	4
<b>Requisito:</b>	MA-1021
<b>Correquisito:</b>	Ninguno
<b>Grupo:</b>	3
<b>Horario:</b>	K 10:00 a.m.-1:00 p.m., V 10:00 a.m.-12:00 p.m., CE444
<b>Profesor:</b>	Daniel Campos Salas
<b>Correo electrónico:</b>	daniel.clases.ucr@gmail.com
<b>Oficina:</b>	
<b>Horas de consulta:</b>	M 2:00 - 3:30 p.m., J 2:00 - 3:00 p.m.

### Aspectos generales del curso

#### 1 Descripción

Este curso busca incentivar en el estudiantado el desarrollo de la capacidad de abstracción y la habilidad para la modelación, a través de la resolución de ejercicios y problemas contextualizados en dos contenidos generales: álgebra lineal y cálculo diferencial en varias variables. En su proceso de aprendizaje es recomendable mantener una actitud crítica durante el desarrollo de las lecciones, utilizar adecuadamente sus conocimientos previos y aprovechar al máximo el trabajo extra clase asignado. Debe resolver los ejercicios planteados luego del estudio de los conceptos claves, las estrategias de solución planteadas deben ir más allá de la mera aplicación de procedimientos memorizados sin comprensión alguna.

Según el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil, la cantidad de créditos de este curso equivale a doce horas semanales de su trabajo en el mismo. Se le recomienda la lectura de dicho reglamento ya que rige los procedimientos de evaluación y orientación académica de cada estudiante de la Universidad de Costa Rica. Puede ser descargado en el siguiente enlace:

[http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen\\_academico\\_estudiantil.pdf](http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen_academico_estudiantil.pdf)

## 2 Objetivos Generales

1. Aplicar conceptos, representaciones y procedimientos propios del álgebra lineal y del cálculo diferencial en varias variables, en un contexto de solución de ejercicios y problemas.
2. Desarrollar habilidades que le permitan resolver problemas o situaciones concretas, relacionados con su formación profesional.
3. Valorar la importancia del álgebra lineal y del cálculo diferencial en varias variables en el desarrollo de modelos aplicados en diferentes disciplinas.

## 3 Objetivos específicos

1. Resolver operaciones que involucren matrices.
2. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante diferentes algoritmos.
3. Clasificar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.
4. Resolver ecuaciones cuya incógnita sea una matriz.
5. Relacionar el cálculo de la inversa de una matriz con el producto de matrices elementales.
6. Calcular determinantes.
7. Aplicar las propiedades básicas del determinante en la simplificación de expresiones.
8. Aplicar las propiedades básicas del álgebra matricial en problemas relacionados con el modelo de Leontief.
9. Interpretar geoméricamente conceptos vectoriales.
10. Utilizar diferentes notaciones para representar una recta y un plano.
11. Calcular la distancia entre puntos, rectas y planos.
12. Interpretar el concepto de función real de varias variables reales.
13. Clasificar superficies cuadráticas dada su ecuación o gráfica.
14. Aplicar el concepto de derivada parcial en problemas de análisis marginal.
15. Determinar una ecuación para el plano tangente y la recta normal a una superficie.
16. Aplicar la regla de la cadena y el teorema de la función implícita en el cálculo de derivadas parciales.
17. Determinar los extremos de funciones de varias variables mediante el criterio del segundo diferencial o el Hessiano.
18. Calcular los extremos absolutos de funciones de varias variables en regiones compactas.
19. Determinar los extremos de funciones de varias variables con restricción de igualdad, mediante multiplicadores de Lagrange.
20. Clasificar los extremos de funciones de varias variables con restricción de igualdad, mediante el método del Hessiano orlado.

## 4 Contenidos

### Tema I. Álgebra lineal

#### Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Matriz, vector fila y vector columna. Algunos tipos de matrices: nula, diagonal, identidad y triangular. Igualdad de matrices. Multiplicación de una matriz por un escalar, suma y producto de matrices. Propiedades básicas del álgebra de matrices. Operaciones elementales sobre las filas de una matriz y matrices elementales. Ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales. Solución y conjunto solución de un sistema. Matriz de coeficientes del sistema y matriz aumentada. Operaciones elementales de las filas de un sistema. Forma escalonada y forma escalonada reducida. Método de Gauss-Jordan. Matrices equivalentes y rango de una matriz. Caracterización del conjunto solución de un sistema. Sistemas homogéneos y no homogéneos. Inversa de una matriz y propiedades básicas de las matrices invertibles. Relación entre matrices invertibles y sistemas de ecuaciones lineales. Transposición de matrices y sus propiedades elementales. Modelo de insumo producto de Leontief.

#### Determinantes

Definición de determinante y sus propiedades básicas. Cálculo de determinantes. Regla de Cramer. Relación entre el rango de una matriz y su determinante. Matriz adjunta y su relación con el cálculo de la inversa.

#### Geometría vectorial en el espacio tridimensional.

Interpretación geométrica de un vector. Distancia entre dos puntos. álgebra de vectores. Norma de un vector, vectores canónicos, vector unitario, dirección de un vector, ángulo entre vectores, vectores paralelos y ortogonales. Producto punto y producto cruz. Proyecciones ortogonales. Ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de una recta. Ecuación vectorial, paramétrica y normal de un plano. Distancias entre: un punto y una recta, dos rectas, un punto y un plano, dos planos.

### Tema II. Cálculo Diferencial en Varias Variables

#### Derivación de funciones de varias variables

Funciones de varias variables y su representación geométrica. Superficies cuadráticas sin términos mixtos. Derivadas parciales y su aplicación en análisis marginal. Derivadas direccionales y vector gradiente. Plano tangente y recta normal a una superficie. Regla de la cadena. Teorema de la función implícita.

#### Optimización de funciones de dos y tres variables

Máximos y mínimos (locales y globales), punto crítico y punto silla. Extremos de funciones sobre regiones abiertas. Criterio de la segunda derivada para clasificar extremos locales de funciones de dos variables. Clasificación de puntos críticos mediante los criterios del diferencial de segundo orden o el Hessiano. Máximos y mínimos en regiones compactas. Multiplicadores de Lagrange. Criterio del Hessiano orlado. Problemas de optimización en varias variables con restricción de igualdad.

## 5 Cronograma

**Semana 1. 12-16 de agosto.** Discusión de aspectos centrales de la carta al estudiante. Ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales. Solución y conjunto solución de un sistema. Matriz, vector fila y vector columna. Algunos tipos de matrices: nula, diagonal, identidad y triangular. Igualdad de matrices.

**Semana 2. 19-23 de agosto.** Multiplicación de una matriz por un escalar, suma, producto y transposición de matrices. Propiedades básicas del álgebra de matrices. Operaciones elementales sobre las filas de una matriz. Matriz de coeficientes del sistema y matriz aumentada. Operaciones elementales de las filas de un sistema. Forma escalonada y forma escalonada reducida. Método de Gauss-Jordan. Matrices equivalentes y rango de una matriz. Caracterización del conjunto solución de un sistema. Sistemas homogéneos y no homogéneos.

**Semana 3. 26-30 de agosto.** Método de Gauss-Jordan. Matrices equivalentes y rango de una matriz. Caracterización del conjunto solución de un sistema. Sistemas homogéneos y no homogéneos. Inversa de una matriz y propiedades básicas de las matrices invertibles. Relación entre matrices invertibles y sistemas de ecuaciones lineales. Modelo de insumo producto de Leontief. Definición de determinante y sus propiedades básicas. Cálculo de determinantes Regla de Cramer. Relación entre el rango de una matriz y su determinante. Matriz adjunta y su relación con el cálculo de la inversa.

**Semana 4. 2-6 de setiembre.** Modelo de insumo producto de Leontief. Definición de determinante y sus propiedades básicas. Cálculo de determinantes Regla de Cramer. Relación entre el rango de una matriz y su determinante. Matriz adjunta y su relación con el cálculo de la inversa.

**Semana 5. 9-13 de setiembre.** Modelo de insumo producto de Leontief. **Hasta aquí los contenidos a evaluar en el primer examen. Repaso.**

**Semana 6. 16-20 de setiembre. Repaso.** Interpretación geométrica de un vector. Distancia entre dos puntos. álgebra de vectores. Norma de un vector, vectores canónicos, vector unitario y dirección de un vector. Producto punto, ángulo entre vectores, vectores paralelos y ortogonales.

**Semana 7. 23-27 de setiembre.** Producto punto, ángulo entre vectores, vectores paralelos y ortogonales. Proyecciones ortogonales. Producto cruz y sus propiedades.

**Semana 8. 30 de setiembre-4 de octubre.** Ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de una recta. Ecuación vectorial, paramétrica y normal de un plano. Rectas paralelas y ortogonales. Planos paralelos y perpendiculares.

**Semana 9. 7-11 de octubre.** Distancias entre: un punto y una recta, dos rectas, un punto y un plano, dos planos. Funciones de varias variables y su representación geométrica. Superficies cuadráticas sin términos mixtos.

**Semana 10. 14-18 de octubre.** Derivadas parciales y su aplicación en análisis marginal. Derivadas direccionales y vector gradiente.

**Semana 11. 21-25 de octubre.** Regla de la cadena de funciones de varias variables. **Hasta aquí los contenidos a evaluar en el segundo examen. Repaso.**

**Semana 12. 28 de octubre-1 de noviembre. Repaso.** Plano tangente y recta normal a una superficie. Teorema de la función implícita.

**Semana 13. 4-8 de noviembre.** Máximos y mínimos (locales y globales), punto crítico y punto silla. Extremos de funciones. Criterio de la segunda derivada para clasificar extremos locales de funciones de dos variables. Clasificar los puntos críticos de funciones de varias variables mediante el criterio del Hessiano.

**Semana 14. 11-15 de noviembre.** Clasificar los puntos críticos de funciones de tres variables mediante el criterio del Hessiano. Multiplicadores de Lagrange. Criterio del Hessiano orlado.

**Semana 15. 18-22 de noviembre.** Máximos y mínimos en regiones compactas. **Hasta aquí los contenidos a evaluar en el tercer examen.**

**Semana 16. 25-29 de noviembre. Repaso.**

## ★ Fechas especiales

Día de la madre: Jueves 15 de agosto

## 6 Metodología

El (la) docente tendrá mayor participación en aquellas sesiones donde se enfatice principalmente en el aprendizaje del componente teórico del curso, lo cual no significa que se prescindan de espacios de discusión con el estudiantado. En las lecciones destinadas para la resolución de ejercicios y problemas cada estudiante debe asumir mayor participación, ya sea exponiendo en la pizarra sus procedimientos ante el resto de compañeras y compañeros o mediante la discusión de resultados cuando deba trabajar en grupo.

Algunas actividades sugeridas a cada estudiante durante el desarrollo del curso:

- Asistir puntualmente a todas las clases.
- Elaborar un listado de preguntas con base en las definiciones, teoremas, propiedades, procedimientos o tipos de problemas que le generan mayor dificultad de comprensión.
- Estudiar lo tratado en la sesión anterior previo a cada clase.
- Cumplir con las tareas que su docente le asigne.
- Resolver los ejercicios presentes en el material didáctico sugerido así como los planteados en exámenes de ciclos anteriores.
- Asistir a las horas de atención a estudiantes ofrecidos por el grupo docente.

## 7 Evaluación

**Se aplicarán tres parciales, la nota de aprovechamiento se calcula con el promedio de los tres parciales. En caso de que un estudiante no realice uno de los exámenes se usará el valor de cero para el cálculo de la nota.**

Para efectos de promoción rigen los siguientes criterios, los cuales se refieren a la nota de aprovechamiento redondeada, en enteros y fracciones de media unidad, según el reglamento vigente, a saber:

- Si la nota de aprovechamiento redondeada es mayor o igual que 7.0 el estudiante aprueba el curso.
- Si la nota de aprovechamiento redondeada es 6.0 ó 6.5 el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación. En este examen debe obtener una nota mayor o igual a 7.0 para aprobar el curso, si aprueba se le reportará 7.0 como nota final, de lo contrario se le reportará su nota de aprovechamiento redondeada. El estudiante que deba realizar el examen de ampliación solo se le evaluará aquellos temas presentes en los parciales que el estudiante no aprobó.
- Si la nota de aprovechamiento redondeada es menor que 6.0 el estudiante pierde el curso.

## 8 Fechas de exámenes

Examen	Fecha	Hora
Suficiencia	Miércoles 11 de setiembre	9:00 a.m.
I parcial	Miércoles 18 de setiembre	8:00 a.m.
Reposición I parcial	Sábado 28 de setiembre	8:00 a.m.
II parcial	Miércoles 30 de octubre	8:00 a.m.
Reposición II parcial	Sábado 9 de noviembre	8:00 a.m.
III parcial	Lunes 2 de diciembre	8:00 a.m.
Reposición III parcial	Jueves 5 de diciembre	8:00 a.m.
Ampliación	13 de diciembre	8:00 a.m.

Para solicitar la reposición de cualquier examen debe presentar en la oficina del coordinador el formulario correspondiente (disponible en la página web [www.emate.ucr.ac.cr](http://www.emate.ucr.ac.cr)) con la documentación que respalde el motivo de ausencia. Se le aprobará su solicitud siempre y cuando esta cumpla con lo establecido en el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil (Capítulo VI, artículo 24). También debe entregar una copia de los documentos a su docente para que este conozca sobre su solicitud.

Al asistir a cualquier evaluación debe considerar los siguientes lineamientos:

- Presentar alguna identificación válida (carné universitario, cédula de identidad, tarjeta de identificación de menores, pasaporte, licencia de conducir, entre otros)
- Portar cuadernillo de examen (no se permiten hojas sin grapar), usar bolígrafo de tinta azul o negra.
- No utilizar calculadoras programables ni graficadoras.
- Realizar la prueba en el grupo en el que se encuentra matriculado.

Es importante considerar que toda la normativa de evaluación del curso se rige según lo establecido en el capítulo VI del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil. Algunos puntos importantes de este son:

- Cada prueba le debe ser entregada a más tardar diez días hábiles después de haberse efectuado.
- Si considera que la prueba ha sido mal evaluada, tiene derecho a solicitar a su docente, de forma oral, aclaraciones y adiciones sobre la evaluación, en un plazo no mayor de tres días hábiles posteriores a la devolución de esta.
- La pérdida comprobada por parte de su docente de cualquier prueba le da derecho a una nota equivalente al promedio de todas las evaluaciones del curso o a repetir la prueba según el criterio suyo.

## 9 Objetivos de evaluación

A continuación, se detallan los objetivos de evaluación que se consideran para la selección de los ejercicios y problemas que se plantean en los exámenes.

### Primer Examen

1. Resolver operaciones con matrices: producto por escalar, suma, resta, producto, transposición.
2. Demostrar identidades mediante álgebra de matrices.
3. Verificar si un vector es solución de un sistema de ecuaciones lineales.
4. Determinar el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales.

5. Calcular el valor de coeficientes en sistemas de ecuaciones lineales alfanuméricos, con el propósito de caracterizar el conjunto solución.
6. Calcular la inversa de una matriz mediante operaciones elementales de fila.
7. Calcular determinantes.
8. Simplificar expresiones algebraicas mediante las propiedades de determinantes.
9. Calcular la inversa de una matriz mediante la matriz adjunta.
10. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer.
11. Determinar si una matriz es invertible mediante el cálculo de su determinante.
12. Resolver ecuaciones cuya incógnita sea una matriz.

## Segundo Examen

1. Interpretar geoméricamente la suma de dos vectores y el producto de un escalar por un vector
2. Calcular la norma de un vector.
3. Determinar si un vector es unitario.
4. Calcular el producto punto de dos vectores y el coseno del ángulo formado por estos.
5. Determinar si dos vectores son paralelos u ortogonales.
6. Calcular la proyección ortogonal de un vector sobre otro.
7. Calcular el producto cruz de dos vectores.
8. Demostrar identidades mediante el álgebra del producto cruz.
9. Calcular el área de un paralelogramo y el volumen de un paralelepípedo mediante el producto cruz.
10. Resolver problemas geoméricos mediante conceptos vectoriales.
11. Determinar la ecuación vectorial, paramétrica o simétrica para una recta.
12. Determinar la ecuación vectorial, paramétrica o normal de un plano.
13. Calcular las intersecciones entre: dos rectas, una recta y un plano, dos planos.
14. Calcular la distancia entre: dos puntos, un punto y una recta, dos rectas, una recta y un plano, dos planos.
15. Determinar el tipo de superficie cuadrática dada su ecuación o gráfica.
16. Calcular derivadas parciales y direccionales.
17. Resolver problemas de análisis marginal.

## Tercer Examen

1. Calcular derivadas parciales mediante la regla de la cadena
2. Comprobar identidades que involucren derivadas parciales de funciones definidas implícitamente.
3. Determinar una ecuación para el plano tangente y la recta normal a una superficie.
4. Calcular los puntos críticos de funciones de dos y tres variables.
5. Determinar los extremos locales de funciones de dos variables mediante el criterio de la segunda derivada.
6. Clasificar los puntos críticos de funciones de varias variables mediante el criterio del Hessiano.
7. Determinar los extremos de funciones de varias variables sujetas a una restricción de igualdad mediante el método de multiplicadores de Lagrange.
8. Clasificar los extremos de funciones de varias variables sujetas a una restricción de igualdad mediante el criterio del Hessiano orlado.
9. Calcular los valores extremos absolutos de una función de varias variables en una región compacta.

## 10 Apoyo del CASE (Centro de Asesoría Estudiantil)

El CASE de Ciencias Básicas en coordinación con la Escuela de Matemática ofrecen los llamados Estudiaderos. Este servicio se da a partir de la segunda semana de clases, los horarios se estarán detallados en la pizarra de la cátedra en el segundo piso del edificio de Física-Matemática. Se le recomienda utilizar estos espacios de discusión para fortalecer aspectos conceptuales y enfatizar en la resolución de ejercicios y problemas.

## 11 Bibliografía sugerida

Los dos libros de texto para el curso son los siguientes:

1. Grossman, S & Flores, J. (2012). *ÁLGEBRA LINEAL*. (7a ed). México DF, México: Mc Graw Hill.
2. Stewart, J. (2012). *CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES. TRASCENDENTES TEMPRANAS*. (7a ed). México DF, México: Cengage Learning.

El primero se utiliza exclusivamente para el tema de álgebra Lineal, el otro trata los contenidos a partir de geometría vectorial inclusive. Otros libros como referencias bibliográficas complementaria son:

1. Arce, C., Castillo, W. & González, J. (2004). *ÁLGEBRA LINEAL*. (3a ed). San José, Costa Rica: EUCR.
2. Howard, A (2016). *INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL*. (5a ed). México DF, México: Limusa.
3. Lay, D. (2012) *ÁLGEBRA LINEAL ELEMENTAL Y SUS APLICACIONES*. (4a ed). México DF, México: Pearson.
4. Rogawski, J. (2012). *CÁLCULO: VARIAS VARIABLES*. (3a ed). Barcelona, España: Reverté.
5. Pita, C. (1995). *CÁLCULO VECTORIAL* (1a ed). Naucalpan de Juárez, México: Prentice Hall Hispanoamérica.
6. Arya, J. & Lardner, R. (2009). *MÁTEMÁTICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACIÓN Y A LA ECONOMÍA*. (5ed). México DF, México: Pearson.

Se le recomienda utilizar apropiadamente la bibliografía, la cual le permitirá reforzar los conceptos y desarrollar sus habilidades en la solución de ejercicios, más allá de lo que el tiempo permite alcanzar durante las lecciones.



## 12 Comentarios Adicionales

Su docente cuenta con un horario extraclase destinado a atender consultas, este le debe ser comunicado durante la primera semana del curso. Es importante que utilice adecuadamente dicho recurso, de tal forma que reciba una atención más individualizada que le permita mejorar su aprendizaje. En el siguiente enlace <https://mediacionvirtual.ucr.ac.cr> podrá descargar material didáctico y prácticas. Por último, recuerde que ante cualquier eventualidad que no podamos controlar, como un cambio de las fechas de los exámenes, se les avisará de forma oportuna.