

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Dpto. de Matemática Aplicada
III Ciclo 2019

Carta al estudiante

Información general

Nombre del curso:	Cálculo para Ciencias Económicas II
Sigla:	MA-1022
Temas generales:	Álgebra lineal y cálculo diferencial en varias variables
Naturaleza del curso:	Teórico
Horas presenciales:	10
Horas personales:	14
Modalidad:	Verano
Créditos:	4
Requisito:	MA-1021
Correquisito:	Ninguno

Aspectos generales del curso

1 Descripción

Este curso busca incentivar en el estudiantado el desarrollo de la capacidad de abstracción y la habilidad para la modelación, a través de la resolución de ejercicios y problemas contextualizados en dos contenidos generales: álgebra lineal y cálculo diferencial en varias variables. En su proceso de aprendizaje es recomendable mantener una actitud crítica durante el desarrollo de las lecciones, utilizar adecuadamente sus conocimientos previos y aprovechar al máximo el trabajo extra clase asignado. Debe resolver los ejercicios planteados luego del estudio de los conceptos claves, las estrategias de solución planteadas deben ir más allá de la mera aplicación de procedimientos memorizados sin comprensión alguna.

Según el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil, la cantidad de créditos de este curso equivale a doce horas semanales de su trabajo en el mismo. Se le recomienda la lectura de dicho reglamento ya que rige los procedimientos de evaluación y orientación académica de cada estudiante de la Universidad de Costa Rica. Puede ser descargado en el siguiente enlace:

http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen_academico_estudiantil.pdf

2 Objetivos Generales

1. Aplicar conceptos, representaciones y procedimientos propios del álgebra lineal y del cálculo diferencial en varias variables, en un contexto de solución de ejercicios y problemas.
2. Desarrollar habilidades que le permitan resolver problemas o situaciones concretas, relacionados con su formación profesional.
3. Valorar la importancia del álgebra lineal y del cálculo diferencial en varias variables en el desarrollo de modelos aplicados en diferentes disciplinas.

3 Objetivos específicos

1. Resolver operaciones que involucren matrices.
2. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante diferentes algoritmos.
3. Clasificar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.
4. Resolver ecuaciones cuya incógnita sea una matriz.
5. Relacionar el cálculo de la inversa de una matriz con el producto de matrices elementales.
6. Calcular determinantes.
7. Aplicar las propiedades básicas del determinante en la simplificación de expresiones.
8. Aplicar las propiedades básicas del álgebra matricial en problemas relacionados con el modelo de Leontief.
9. Interpretar geoméricamente conceptos vectoriales.
10. Utilizar diferentes notaciones para representar una recta y un plano.
11. Calcular la distancia entre puntos, rectas y planos.
12. Clasificar superficies cuadráticas dada su ecuación o gráfica.
13. Trazar regiones cerradas a partir de su frontera.
14. Interpretar el concepto de función real de varias variables reales.
15. Aplicar el concepto de derivada parcial en problemas de análisis marginal.
16. Determinar una ecuación para el plano tangente y la recta normal a una superficie.
17. Aplicar la regla de la cadena y el teorema de la función implícita en el cálculo de derivadas parciales.
18. Determinar y clasificar los extremos de funciones de varias variables mediante el criterio del Hessiano y de valores propios del mismo.
19. Calcular los extremos absolutos de funciones de varias variables en regiones compactas.
20. Determinar los extremos de funciones de varias variables con restricción de igualdad, mediante multiplicadores de Lagrange.
21. Clasificar los extremos de funciones de varias variables con restricción de igualdad, mediante el método del Hessiano orlado.

4 Contenidos

Tema I. Álgebra lineal

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Matriz, vector fila y vector columna. Algunos tipos de matrices: nula, diagonal, identidad y triangular. Igualdad de matrices. Multiplicación de una matriz por un escalar, suma y producto de matrices. Propiedades básicas del álgebra de matrices. Operaciones elementales sobre las filas de una matriz y matrices elementales. Ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales. Solución y conjunto solución de un sistema. Matriz de coeficientes del sistema y matriz aumentada. Operaciones elementales de las filas de un sistema. Forma escalonada y forma escalonada reducida. Método de Gauss-Jordan. Matrices equivalentes y rango de una matriz. Caracterización del conjunto solución de un sistema. Sistemas homogéneos y no homogéneos. Inversa de una matriz y propiedades básicas de las matrices invertibles. Relación entre matrices invertibles y sistemas de ecuaciones lineales. Transposición de matrices y sus propiedades elementales. Modelo de insumo producto de Leontief. Definición de determinante y sus propiedades básicas. Cálculo de determinantes. Regla de Cramer. Relación entre el rango de una matriz y su determinante. Matriz adjunta y su relación con el cálculo de la inversa.

Geometría vectorial en el espacio tridimensional.

Interpretación geométrica de un vector. Distancia entre dos puntos. álgebra de vectores. Norma de un vector, vectores canónicos, vector unitario, dirección de un vector, ángulo entre vectores, vectores paralelos y ortogonales. Producto punto y producto cruz. Proyecciones ortogonales. Ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de una recta. Ecuación vectorial, paramétrica y normal de un plano. Distancias entre: un punto y una recta, dos rectas, un punto y un plano, dos planos. Curvas y superficies cuadráticas. Lectura de regiones compactas.

Tema II. Cálculo Diferencial en Varias Variables

Derivación de funciones de varias variables

Funciones de varias variables y su representación geométrica. Superficies cuadráticas sin términos mixtos. Derivadas parciales y su aplicación en análisis marginal. Derivadas direccionales y vector gradiente. Plano tangente y recta normal a una superficie. Regla de la cadena. Teorema de la función implícita.

Optimización de funciones en varias variables.

Máximos y mínimos (locales y globales), punto crítico y punto silla. Extremos de funciones sobre regiones abiertas. Criterio de la segunda derivada para clasificar extremos locales de funciones de dos variables. Clasificación de puntos críticos mediante los criterios del diferencial de segundo orden o el Hessiano. Máximos y mínimos en regiones compactas. Multiplicadores de Lagrange. Criterio del Hessiano orlado. Problemas de optimización en varias variables con restricción de igualdad.

5 Cronograma

06-01-20. Concepto y tipos de matrices. Suma de matrices y producto escalar de matrices.

07-01-20. Multiplicación de matrices, propiedades y factorización de expresiones matriciales.

08-01-20. Sistemas de ecuaciones. Matriz escalonada reducida, operaciones elementales de fila. Reducción Gaussiana.

09-01-20. Conjunto solución. Definición de rango de una matriz. Relación del rango y soluciones de un sistema matricial.

- 13-01-20.** Matrices invertibles, matrices elementales y cálculo de inversas. Propiedades de matrices invertibles.
- 14-01-20.** Relación de matrices invertibles con sistemas de ecuaciones. Ecuaciones matriciales.
- 15-01-20.** Modelo de insumo-producto de Leontief. Definición de determinante, cálculo de determinantes. Propiedades de determinante.
- 16-01-20.** Relación de determinante con sistemas de ecuaciones. Regla de Cramer. Propiedades del determinante respecto a las operaciones elementales fila.
- 20-01-20.** Definición de \mathbb{R}^n y sus operaciones algebraicas. Introducción a la geometría vectorial y definición de una norma.
- 21-01-20.** Puntos y flechas, graficación de vectores y traslaciones. Ángulo entre vectores.
- 22-01-20.** Vectores ortogonales y paralelos. Proyección ortogonal.
- 23-01-20.** Producto cruz. Área del paralelogramo.
- 24-01-20. Primer parcial. Abarca el contenido presentado del 06-01-20 hasta el 16-01-20.**
- 27-01-20.** Rectas en \mathbb{R}^n (forma vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas). Intersección entre rectas. Rectas paralelas y perpendiculares. Distancia entre punto y recta.
- 28-01-20.** Planos en \mathbb{R}^3 (forma vectorial y ecuación normal). Intersección entre dos planos.
- 29-01-20.** Distancia entre dos rectas y entre dos planos. Curvas cuadráticas: Círculo y Elipse.
- 30-01-20.** Hipérbola y parábola. Intersecciones entre curvas cuadráticas e intersecciones entre curvas cuadráticas y rectas. Lectura de regiones cerradas.
- 03-02-20.** Superficies cuadráticas: Esferas, Elipsoides, Hiperboloides y Paraboloides.
- 04-02-20.** Cono elíptico, cilindros y Paraboloides hiperbólico. Intersecciones entre superficies cuadráticas e intersecciones entre superficies cuadráticas y planos. Lectura de regiones cerradas.
- 05-02-20.** Concepto de funciones en varias variables. Idea intuitiva de límite en varias variables. Definición de derivada direccional y derivada parcial.
- 06-02-20.** Vector gradiente. Cálculo de derivadas parciales y direccionales.
- 10-02-20.** Matriz Jacobiana. Derivadas de orden superior. Matriz Hessiana.
- 11-02-20.** Regla de la cadena.
- 12-02-20.** Teorema de función implícita.
- 13-02-20.** Interpretación geométrica de la derivada direccional. Vector normal a una superficie.
- 14-02-20. Segundo Parcial. Abarca el contenido presentado del 20-01-20 hasta el 04-02-20.**
- 17-02-20.** Plano tangente a una superficie. Recta normal a una superficie.
- 18-02-20.** Puntos críticos. Cálculo de puntos críticos.

19-02-20. Cálculo de valores propios de una matriz. Polinomio característico. Optimización por valores propios.

20-02-20. Menores principales. Criterio de Sylvester.

24-02-20. Optimización de funciones en regiones compactas.

25-02-20. Multiplicadores de Lagrange. Hessiano Orlado y sus menores principales.

26-02-20. Análisis marginal. Función de utilidad.

27-02-20. Sesión de ejercicios.

02-03-20. Tercer Parcial. Abarca el contenido del 05-02-20 hasta el 26-02-20.

17-02-20. Examen de Ampliación.

6 Metodología

El (la) docente tendrá mayor participación en aquellas sesiones donde se enfatice principalmente en el aprendizaje del componente teórico del curso, lo cual no significa que se prescindiera de espacios de discusión con el estudiantado. En las lecciones destinadas para la resolución de ejercicios y problemas cada estudiante debe asumir mayor participación, ya sea exponiendo en la pizarra sus procedimientos ante el resto de compañeras y compañeros o mediante la discusión de resultados cuando deba trabajar en grupo.

Algunas actividades sugeridas a cada estudiante durante el desarrollo del curso:

- Asistir puntualmente a todas las clases.
- Elaborar un listado de preguntas con base en las definiciones, teoremas, propiedades, procedimientos o tipos de problemas que le generan mayor dificultad de comprensión.
- Estudiar lo tratado en la sesión anterior previo a cada clase.
- Cumplir con las tareas que su docente le asigne.
- Resolver los ejercicios presentes en el material didáctico sugerido así como los planteados en exámenes de ciclos anteriores.
- Asistir a las horas de atención a estudiantes ofrecidos por el grupo docente.

7 Evaluación

Se aplicarán tres parciales, la nota de aprovechamiento se calcula con una distribución del 30%, 35% y 35%, donde el primer porcentaje corresponderá al examen de menor calificación en base 100. En caso de que un estudiante no realice uno de los exámenes se usará el valor de cero para el cálculo de la nota.

Para efectos de promoción rigen los siguientes criterios, los cuales se refieren a la nota de aprovechamiento redondeada, en enteros y fracciones de media unidad, según el reglamento vigente, a saber:

- Si la nota de aprovechamiento redondeada es mayor o igual que 7.0 el estudiante aprueba el curso.

- Si la nota de aprovechamiento redondeada es 6.0 ó 6.5 el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación. En este examen debe obtener una nota mayor o igual a 7.0 para aprobar el curso, si aprueba se le reportará 7.0 como nota final, de lo contrario se le reportará su nota de aprovechamiento redondeada. El estudiante que deba realizar el examen de ampliación solo se le evaluará aquellos temas presentes en los parciales que el estudiante no aprobó.
- Si la nota de aprovechamiento redondeada es menor que 6.0 el estudiante pierde el curso.

8 Fechas de exámenes

Examen	Fecha	Hora
I parcial	Viernes 24 de Enero	9:00 a.m.
II parcial	Viernes 14 de Febrero	9:00 a.m.
III parcial	Lunes 02 de Marzo	9:00 a.m.
Ampliación	Jueves 05 de Marzo	9:00 a.m.

Para solicitar la reposición de cualquier examen debe presentar en la oficina del coordinador el formulario correspondiente (disponible en la página web www.emate.ucr.ac.cr) con la documentación que respalde el motivo de ausencia. Se le aprobará su solicitud siempre y cuando esta cumpla con lo establecido en el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil (Capítulo VI, artículo 24). También debe entregar una copia de los documentos a su docente para que este conozca sobre su solicitud.

Al asistir a cualquier evaluación debe considerar los siguientes lineamientos:

- Presentar alguna identificación válida (carné universitario, cédula de identidad, tarjeta de identificación de menores, pasaporte, licencia de conducir, entre otros)
- Portar cuadernillo de examen (no se permiten hojas sin grapar), usar bolígrafo de tinta azul o negra.
- No utilizar calculadoras programables ni graficadoras.
- Realizar la prueba en el grupo en el que se encuentra matriculado.

Es importante considerar que toda la normativa de evaluación del curso se rige según lo establecido en el capítulo VI del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil. Algunos puntos importantes de este son:

- Cada prueba le debe ser entregada a más tardar diez días hábiles después de haberse efectuado.
- Si considera que la prueba ha sido mal evaluada, tiene derecho a solicitar a su docente, de forma oral, aclaraciones y adiciones sobre la evaluación, en un plazo no mayor de tres días hábiles posteriores a la devolución de esta.
- La pérdida comprobada por parte de su docente de cualquier prueba le da derecho a una nota equivalente al promedio de todas las evaluaciones del curso o a repetir la prueba según el criterio suyo.

9 Objetivos de evaluación

A continuación, se detallan los objetivos de evaluación que se consideran para la selección de los ejercicios y problemas que se plantean en los exámenes.

Primer Examen

1. Resolver operaciones con matrices: producto por escalar, suma, resta, producto, transposición.
2. Simplificar expresiones matriciales utilizando las propiedades del álgebra de matrices.
3. Resolver sistemas de ecuaciones lineales implementando reducción Gaussiana.
4. Caracterizar el conjunto solución de un sistema a partir de un análisis del rango de la matriz de coeficientes.
5. Calcular la inversa de una matriz mediante operaciones elementales de fila.
6. Determinar la inversa de una matriz a partir de propiedades de inversas.
7. Resolver un sistema de ecuaciones lineales implementando la matriz inversa de la matriz de coeficientes.
8. Resolver ecuaciones cuya incógnita sea una matriz.
9. Aplicar las matrices para resolver problemas relacionados con el modelo de insumo-producto de Leontief.
10. Calcular determinantes.
11. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer.
12. Analizar la relación entre solución única, matriz invertible y determinante no cero.

Segundo Examen

1. Calcular expresiones vectoriales: suma de vectores, producto escalar, producto interno, producto cruz.
2. Interpretar geoméricamente la suma de dos vectores y el producto de un escalar por un vector
3. Calcular la norma de un vector.
4. Determinar el ángulo entre vectores.
5. Determinar si dos vectores son paralelos u ortogonales.
6. Calcular la proyección ortogonal de un vector sobre otro.
7. Calcular el área de un paralelogramo.
8. Resolver problemas geométricos mediante conceptos vectoriales.
9. Determinar la ecuación vectorial, paramétrica o simétrica para una recta.
10. Determinar la ecuación vectorial o normal de un plano.
11. Calcular las intersecciones entre: dos rectas, dos planos.
12. Calcular la distancia entre: dos puntos, un punto y una recta, dos rectas, una recta y un plano, dos planos.
13. Determinar el tipo de curva ó superficie cuadrática dada su ecuación.
14. Graficar los conceptos estudiados de geometría vectorial, así como regiones cerradas.

Tercer Examen

1. Calcular derivadas parciales y direccionales.
2. Calcular derivadas parciales mediante la regla de la cadena
3. Comprobar identidades que involucren derivadas parciales de funciones definidas implícitamente.
4. Determinar una ecuación para el plano tangente y la recta normal a una superficie.
5. Calcular los puntos críticos de funciones de varias variables.
6. Determinar los puntos críticos de funciones de varias variables.
7. Clasificar los puntos críticos de funciones de varias variables mediante el criterio del Hessiano y por análisis de valores propios de la matriz Hessiana.
8. Determinar los extremos de funciones de varias variables sujetas a una restricción de igualdad mediante el método de multiplicadores de Lagrange.
9. Clasificar los extremos de funciones de varias variables sujetas a una restricción de igualdad mediante el criterio del Hessiano orlado.
10. Calcular los valores extremos absolutos de una función de varias variables en una región compacta.
11. Resolver problemas de análisis marginal.

10 Apoyo del CASE (Centro de Asesoría Estudiantil)

El CASE de Ciencias Básicas en coordinación con la Escuela de Matemática ofrecen los llamados Estudiaderos. Este servicio se da a partir de la segunda semana de clases, los horarios se estarán detallados en la pizarra de la cátedra en el segundo piso del edificio de Física-Matemática. Se le recomienda utilizar estos espacios de discusión para fortalecer aspectos conceptuales y enfatizar en la resolución de ejercicios y problemas.

11 Bibliografía sugerida

Los dos libros de texto para el curso son los siguientes:

1. Grossman, S & Flores, J. (2012). *ÁLGEBRA LINEAL*. (7a ed). México DF, México: Mc Graw Hill.
2. Stewart, J. (2012). *CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES. TRASCENDENTES TEMPRANAS*. (7a ed). México DF, México: Cengage Learning.

El primero se utiliza exclusivamente para el tema de álgebra Lineal, el otro trata los contenidos a partir de geometría vectorial inclusive. Otros libros como referencias bibliográficas complementaria son:

1. Arce, C., Castillo, W. & González, J. (2004). *ÁLGEBRA LINEAL*. (3a ed). San José, Costa Rica: EUCR.
2. Howard, A (2016). *INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL*. (5a ed). México DF, México: Limusa.
3. Lay, D. (2012) *ÁLGEBRA LINEAL ELEMENTAL Y SUS APLICACIONES*. (4a ed). México DF, México: Pearson.
4. Rogawski, J. (2012). *CÁLCULO: VARIAS VARIABLES*. (3a ed). Barcelona, España: Reverté.
5. Pita, C. (1995). *CÁLCULO VECTORIAL* (1a ed). Naucalpan de Juárez, México: Prentice Hall Hispanoamérica.

6. Arya, J. & Lardner, R. (2009). MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACIÓN Y A LA ECONOMÍA. (5ed). México DF, México: Pearson.

Se le recomienda utilizar apropiadamente la bibliografía, la cual le permitirá reforzar los conceptos y desarrollar sus habilidades en la solución de ejercicios, más allá de lo que el tiempo permite alcanzar durante las lecciones.