



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA  
Departamento Matemática Aplicada  
I Ciclo – 2020

## Carta al estudiante

Sigla y nombre del curso: MA-2210 Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Naturaleza del curso: Teórico Práctico

Virtualidad: Bajo Virtual

Horas presenciales: 5

Horas de estudio independiente: 10

Modalidad: Semestral

Carga académica: 3 créditos

Requisito: MA-1001 o MA-1210

Correquisito: Ninguno

### **Estimado(a) estudiante:**

En este curso se estudiarán algunas técnicas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, lineales de orden arbitrario, sistemas de ecuaciones diferenciales y transformada de Laplace. Además, se tratarán los conceptos básicos del álgebra lineal, haciendo énfasis en el álgebra matricial y su aplicación a la solución de sistemas de ecuaciones lineales. También se mostrarán diversas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales al modelaje y solución de problemas relacionados con otras áreas del conocimiento, en particular, en el crecimiento poblacional, reacciones químicas e ingeniería presentan aplicaciones bastante interesantes.

Por todo lo anterior, es fundamental que el estudiante domine a cabalidad los contenidos del curso previo MA-1210(requisito) o MA-1001.

El curso tiene una carga académica de tres créditos, lo que significa que amerita quince horas de estudio semanal. Descontando las cinco horas de clase, el estudiante debe comprometerse a dedicar al menos diez de estudio extra-clase, tanto a la teoría como a los ejercicios. Esta información puede consultarse en el sitio:

[http://www.cu.ucr.ac.cr/uploads/tx\\_ucruniversitycouncildatabases/normative/definicion\\_credito.pdf](http://www.cu.ucr.ac.cr/uploads/tx_ucruniversitycouncildatabases/normative/definicion_credito.pdf)

Es su responsabilidad leer y estar al tanto de toda la información que aquí se le suministra, así como

estar al día con la materia y listas de ejercicios, de igual manera algunos temas o apartados pueden ser asignados para estudio independiente.

## **2 Objetivos generales del curso**

1. Emplear algunas destrezas matemáticas que sean de utilidad para el estudiante en su ejercicio profesional.
2. Aplicar conceptos y herramientas matemáticas que permitan comprender modelos basados en ecuaciones diferenciales.
3. Fomentar el espíritu crítico mediante la discusión de conceptos fundamentales.
4. Utilizar la teoría básica de las ecuaciones diferenciales ordinarias y los principales métodos de solución.
5. Utilizar la teoría básica de los sistemas de ecuaciones lineales y como determinar su conjunto solución.
6. Resolver problemas relacionados con la disciplina del estudiante que puedan ser modelados ya sea mediante un sistema de ecuaciones lineales, una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales; interpretando los resultados dentro del área de su aplicación.

## **3 Objetivos específicos del curso**

1. Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
2. Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes de cualquier orden y la ecuación de Euler.
3. Conocer y aplicar el método de variación de parámetros para obtener soluciones particulares de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.
4. Resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales por métodos de eliminación de operadores.
5. Utilizar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.
6. Plantear y resolver distintos problemas de aplicación que puedan modelarse haciendo uso de sistemas de ecuaciones lineales o de ecuaciones diferenciales ordinarias.

## **4 Contenidos del curso**

1. Conceptos básicos y ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:
  - 1.1 Definición de ecuación diferencial ordinaria.
  - 1.2 Orden, solución particular y solución general de una ecuación diferencial.
  - 1.3 Existencia y unicidad de solución para un problema de valor inicial.
  - 1.4 Ecuaciones diferenciales en variables separables.
  - 1.5 Ecuaciones homogéneas y reducibles a homogéneas.
  - 1.6 Ecuaciones lineales y reducibles a ellas (ecuación de Bernoulli y de Ricatti).
  - 1.7 Ecuaciones exactas y reducibles a exactas por medio de un factor integrante.
  - 1.8 Reducción de orden en ecuaciones diferenciales de segundo orden con una variable ausente.

2. Aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:
  - 2.1 Crecimiento y decrecimiento de poblaciones.
  - 2.2 Desintegración radiactiva. Vida media. Fechado de fósiles.
  - 2.3 Ley de enfriamiento de Newton
  - 2.4 Reacciones químicas.
  - 2.5 Mezclas.
3. Ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que uno:
  - 3.1 Combinación lineal de un conjunto de funciones.
  - 3.2 Conjunto de funciones linealmente dependiente e independiente.
  - 3.3 Wronskiano de un conjunto de  $n$  soluciones de una ecuación diferencial de orden  $n$ .
  - 3.4 Operadores diferenciales. Anuladores.
  - 3.5 Métodos de solución para una ecuación diferencial lineal homogénea de orden  $n$ .
  - 3.6 Fórmula de Abel.
  - 3.7 Reducción de orden, conocida una solución de la ecuación de la ecuación homogénea asociada a una ecuación diferencial lineal de segundo orden.
  - 3.8 Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Método de coeficientes indeterminados.
  - 3.9 Método de variación de parámetros.
  - 3.10 Ecuación de Euler.
4. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:
  - 4.1 Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales.
  - 4.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
  - 4.3 Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, de orden arbitrario, con coeficientes constantes, aplicando el método de eliminación de operadores para transformar un sistema dado en uno equivalente que tenga forma triangular.
  - 4.4 Tanques interconectados.
5. Transformada de Laplace:
  - 5.1 Integrales impropias en intervalos no acotados.
  - 5.2 Transformada de Laplace y su inversa. Definición y propiedades básicas.
  - 5.3 Transformada de Laplace de algunas funciones elementales.
  - 5.4 Transformada de Laplace de la derivada de una función y de la integral de una función.
  - 5.5 Teoremas de traslación de la Transformada de Laplace sobre los ejes  $s$  y  $t$ .  
Funciones  
escalón unitario.
  - 5.6 Derivación de la transformada de Laplace.
  - 5.7 Transformada de Laplace de una función periódica.
  - 5.8 Teorema de convolución. Ecuaciones Integrodiferenciales.
  - 5.9 Problemas de valor inicial.

## 5. Metodología y actividades para el logro de los objetivos

El curso se basa en la metodología tradicional, donde docente explica en la pizarra los contenidos, da ejemplos y realiza ejercicios. En ocasiones se pide pasar a estudiantes a la pizarra para resolver ejercicios asignados con el propósito de conocer el pensar de este y visualizar errores comunes previamente.

Por otra parte, es sumamente importante que el estudiante participe activamente durante las lecciones, aportando ideas, trabajando los ejercicios propuestos y manifestando sus dudas. Además debe realizar trabajo extraclase resolviendo las prácticas disponibles y repasando los temas vistos en clase para reforzar los conocimientos y desarrollar las destrezas y las habilidades que se requieren. Para el logro de estos objetivos se recomienda el trabajo en equipo y la consulta permanente con los profesores de la cátedra. Para el logro de los objetivos del curso el estudiante debe:

Conocer los principales métodos de solución para las ecuaciones diferenciales de primer orden, poder identificar una ecuación de variables separables, ecuaciones homogéneas, ecuaciones lineales, ecuaciones exactas, determinar si una función dada es un factor integrante, hallar un factor integrante de una forma indicada y poder efectuar transformaciones que convierta una ecuación dada en una de otro tipo conocido.

Poder modelar problemas concretos, que siguen leyes conocidas, mediante ecuaciones diferenciales, e interpretar las soluciones obtenidas.

Identificar ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Calcular el Wronskiano de un conjunto finito de funciones diferenciables dado. Determinar si un conjunto de soluciones dado, de una ecuación diferencial lineal homogénea, constituye un sistema fundamental de soluciones y en caso afirmativo escribir su solución general. Conocer y aplicar los métodos de variación de parámetros y de cocientes indeterminados para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales lineales. Reconocer una ecuación de Euler, aplicar una transformación adecuada para convertirla en una ecuación con coeficientes constantes y resolverla. Resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden, conocida una solución de la ecuación homogénea asociada. Conocer y aplicar la fórmula de Abel.

Identificar sistemas de ecuaciones lineales y el método de eliminación de operadores para resolver sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

Conocer y aplicar la definición de transformada de Laplace. Conocer las propiedades básicas de la transformada de Laplace (linealidad, comportamiento respecto a la derivación e integración, a la multiplicación por funciones escalón unitario y a la convolución). Poder calcular la transformada inversa de una función dada, haciendo uso de tablas y de las propiedades de la transformada de Laplace. Aplicar la transformada de Laplace a la solución de problemas con valor inicial, modelados mediante una ecuación diferencial, o mediante ecuaciones integrodiferenciales. Modelar problemas de tanques interconectados mediante sistemas de ecuaciones diferenciales y resolverlos.

Los materiales teóricos y didácticos del curso y demás actividades evaluativas se encuentran en la plataforma de mediación virtual mediante la dirección <https://mediacionvirtual.ucr.ac.cr/login/index.php>

## 6 Evaluación

La evaluación se compone de

- 3 exámenes parciales con un valor de 10/3 cada uno.

Cada examen se realizará en clase el día jueves o viernes de la correspondiente semana y tendrá una duración de 2 horas.

### Reporte de la nota final

Los siguientes criterios, se refieren a la nota de aprovechamiento NA, expresada en una escala de 0

a 10, redondeada, en enteros y fracciones de media unidad, según el reglamento vigente:

Si NA es mayor a 6,75 el estudiante gana el curso con calificación NA redondeada a la media más próxima, los casos intermedios, por ejemplo, como 8,25 se redondean hacia arriba, es decir, 8,5. Si NA es mayor o igual a 5,75 y menor a 6,75, el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación, en el cual se debe obtener una nota superior o igual a 7 para aprobar el curso con nota 7, en caso contrario su nota será 6,0 o 6,5, la más cercana a NA. Si NA es menor a 5,75 pierde el curso. La calificación final del curso se notifica a la Oficina de Registro e Información, en la escala de cero a diez, en enteros y fracciones de media unidad.

### Examen de Ampliación

El examen de ampliación consta de tres partes, una por cada parcial, en este caso aquellos estudiantes que deban realizar este examen deberán hacer las partes que su profesor le indicó, por ejemplo, si un estudiante no aprobó el primer y tercer parcial, deberá realizar las partes uno y tres del examen de ampliación.

### Calendario de las pruebas

Prueba	Fecha	Contenidos
I Parcial	16 - 17 de abril	1.1 al 1.8, 2.1 al 2.5
Repo I Parcial	Miércoles 29 de abril 10:00	1.1 al 1.8, 2.1 al 2.5
II Parcial	28 – 29 de mayo	3.1 al 3.10, 4.1 al 4.4
Repo II Parcial	Miércoles 3 de junio 10:00	3.1 al 3.10, 4.1 al 4.4
III Parcial	2 – 3 de julio	5.1 al 5.9
Repo III Parcial	Miércoles 8 de julio 10:00	5.1 al 5.9
Ampliación	Viernes 17 de julio 10:00	
Suficiencia	Miércoles 6 de Mayo	Todos

### Disposiciones para la realización de las evaluaciones

El estudiante debe presentarse puntualmente el día del examen en el aula que fue asignada a su grupo. El estudiante debe traer un cuadernillo de examen y bolígrafo de tinta azul o negra. También es indispensable portar identificación con foto (cédula, pasaporte, licencia de conducir o carné universitario) de lo contrario no podrá realizar la prueba. En los exámenes de este curso no se permite el uso de programables ni grabadoras. Durante la aplicación de la prueba, se prohíbe el uso de teléfonos celulares, tabletas electrónicas y cualquier otro dispositivo de transferencia de información.

### Exámenes de reposición

Aquellos casos de estudiantes con ausencia justificada a un examen, tales como enfermedades (con justificación médica), o choques de exámenes (con constancia del Sr. coordinador respectivo), o casos de giras (reportados por escrito) y con el visto bueno del órgano responsable, podrán realizar el

examen de reposición. Para solicitar el examen de reposición debe llenar la boleta de justificación (se descarga en la página de la escuela de matemática: [www.emate.ucr.ac.cr](http://www.emate.ucr.ac.cr)), con esta adjuntar la respectiva constancia y entregarla al profesor del grupo correspondiente en los cinco días hábiles siguientes después de realizada la prueba ordinaria. Solo los estudiantes autorizados mediante este proceso pueden realizar el examen de reposición. La entrega de los documentos no implica la autorización para hacer el examen de reposición, el profesor debe aprobar la autorización una vez revisada la documentación.

## Calificación de exámenes

El profesor debe entregar a los alumnos los exámenes calificados y sus resultados, a más tardar 10 días hábiles después de que este se realizó, de lo contrario, el estudiante podrá presentar reclamo ante la coordinación de la cátedra. La pérdida comprobada de un examen por parte del profesor da derecho al estudiante una nota equivalente al promedio de sus calificaciones en los otros dos exámenes, o a criterio del estudiante, a repetir el examen.

## 7 Horas de consulta

Cada profesor de la cátedra dispone de un horario de consulta, para atender las dudas de los estudiantes respecto a la materia del curso, así como los ejercicios propuestos para cada sección. Los estudiantes pueden ir a consulta con cualquier profesor de la cátedra, en el horario que le sea más favorable. Los horarios de consulta se discutirán durante la primera semana de clases.

## 8 Profesores y consulta:

- G01 L 13:00 – 15:50 203 AU, J 13:00 - 14:50 203 AU – Yois Campos  
Consulta: K 10:00 – 13:00 J 08:30 – 10:30 of 326 Edificio Anexo Matemática.
- G02 L 10:00 – 12:50, 304 IN, J 11:00 – 12:50 304 IN - Andy Alvarado  
Consulta: K 15:00 – 18:00 of 328 Edificio Anexo Matemática.
- G03 K 07:00 – 08:50, 403 FC, V 07:00 – 9:50 212 FM - Tobías Chavarría  
Consulta: K 9:00 – 10:15 416 FM y M 07:00 – 08:15 Virtual
- G04 K 10:00 – 12:50, 303 FC, V 11:00 – 12: 50 303 FC - Alberto Hernández
- G05 K 16:00 – 18:50, 405 FC, V 17:00 - 18:50 405 FC - Alberto Hernández  
Consulta : K 14:00 – 15:30 y V 14:00 – 16:30 of 1 CIMPA, Edificio Anexo Matemática.

## 9 Avisos y contacto

La cátedra utilizará la plataforma mediación virtual <https://mediacionvirtual.ucr.ac.cr/login/index.php> que la Escuela de Matemática pone a disposición de profesores y estudiantes, para crear la página del curso MA-2210 y así establecer una forma de comunicación con el estudiantado. En dicha página, aparecerá copia de este documento, así como prácticas periódicamente, las aulas de los exámenes y cualquier aviso importante. Los avisos relativos a las aulas de exámenes también serán publicados en la pizarra de la cátedra, en el segundo piso del edificio de Física y Matemáticas.

## 10 Estudiaderos

El CASE pone a disposición los estudiaderos, estos se llevan a cabo los miércoles a partir de las 8:00 am, y son atendidos por asistentes, en su mayoría estudiantes avanzados de varias carreras, quienes están a disposición para atender dudas de diversas áreas, en temas de teoría y de ejercicios. Se desarrolla en el aula 102 de Física y Matemática durante todo el semestre.

## 11 Cronograma

Este cronograma es una guía de la distribución de los contenidos. Cada profesor está en libertad de

exponer los conceptos y realizar la práctica que considere necesaria, sin alterar los contenidos que debe cubrir para cada examen parcial.

- Semana 1: 9 – 13 de marzo

Definición de una ecuación diferencial ordinaria. Orden, solución particular y solución general de una ecuación diferencial. Existencia y unicidad de solución para un problema de valor inicial. Ecuaciones diferenciales en variables separables.

- Semana 2: 16 – 20 de marzo

Ecuaciones homogéneas y reducibles a homogéneas. Ecuaciones lineales y reducibles a ellas (ecuación de Bernoulli y de Ricatti).

- Semana 3: 23 – 27 de marzo

Ecuaciones exactas y reducibles a exactas por medio de un factor integrante. Reducción de orden en ecuaciones diferenciales de segundo orden con una variable ausente.

- Semana 4: 30 de marzo a 3 de abril

Crecimiento y decrecimiento de poblaciones, Desintegración radiactiva, Vida media, Fechado de fósiles. Ley de enfriamiento de Newton, Reacciones químicas. Mezclas. **(Hasta aquí los contenidos del Primer parcial)**

- Semana 5: 6 – 10 de abril

### **Semana Santa**

- Semana 6: 13 – 17 de abril (Semana de I Parcial)

Repaso (examen de práctica) y I Parcial

- Semana 7: 20 – 24 de abril (Semana U)

Combinación lineal de un conjunto de funciones. Conjunto de funciones linealmente dependiente e independiente. Wronskiano de un conjunto de  $n$  soluciones de una ecuación diferencial de orden  $n$ .

- Semana 8: 27 de abril a 1 mayo (Reposición I Parcial)

Operadores diferenciales. Anuladores. Métodos de solución para una ecuación diferencial lineal homogénea de orden  $n$

- Semana 8: 4 – 8 de mayo

Reducción de orden, conocida una solución de la ecuación homogénea asociada a una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Fórmula de Abel. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Método de coeficientes indeterminados

- Semana 9: 11 – 15 de mayo

Método de variación de parámetros. Ecuación de Euler Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

- Semana 10: 18 – 22 mayo

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, de orden arbitrario, con coeficientes constantes, aplicando el método de eliminación de operadores para transformar un sistema dado en uno equivalente que tenga forma triangular. Tanques interconectados **(Hasta aquí los contenidos del II Parcial)**

- Semana 11: 25 – 29 de mayo (Semana de II Parcial)

Examen de práctica y II Parcial

- Semana 12: 1 – 5 junio

Integrales impropias en intervalos no acotados. Transformada de Laplace y su inversa. Definición y propiedades básicas.

- Semana 13: 8 – 12 de junio

Definición y propiedades básicas. Transformada de Laplace de algunas funciones elementales.

- Semana 14: 15 – 19 de junio

Transformada de Laplace de la derivada de una función y de la integral de una función. Teoremas de traslación de la Transformada de Laplace sobre los ejes  $s$  y  $t$ . Funciones escalón unitario.

- Semana 15: 22 – 26 de junio

Derivación de la transformada de Laplace. Transformada de Laplace de una función periodica. Teorema de convolución. Ecuaciones Integrodiferenciales. Problemas de valor inicial.  
**(Hasta aquí los temas de III Parcial)**

- Semana 16: 29 de junio a 3 de julio

Examen de práctica y III Parcial.

## 12 Referencias

Las referencias incluidas en esta carta constituyen una guía para el profesor y el estudiante en cuanto al nivel de presentación de los temas incluidos en el programa. El profesor puede ampliarla con otros libros de su preferencia.

- [1] Céspedes, J. Ecuaciones Diferenciales para Ciencias de la Vida. Editorial UCR, San José, 2010.  
[2] Zill, D.G. and Cullen, M.R. Ecuaciones Diferenciales con Problemas con Valores en la Frontera. Séptima edición. [3] Zill, D.G. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. Novena edición. Cengage Learning, México, 2009. [4] Spiegel, M.R. Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. Prentice Hall Hispanoamerica, S.A., Mexico, 1987. [5] Arce, C., Castillo, W., González, J. Algebra Lineal. Tercera edición. Editorial UCR, San José, 2005. [6] Herrera, E., Ernesto, J., et al. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Reverte, Barcelona, 2010. [7] Braun, M. Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A., México, 1990. [8] Simmons, G. E. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. Segunda edición. McGraw-Hill, México, 1993. [9] Barrantes, H. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales. Editorial Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica, 2015. [10] Tenenbaum, M. and Pollard, H. Ordinary Dierential Equations. Dover Publications, Inc., New York, 1985. [11] Finney, R.L. and Ostberg, D.R. Elementary Dierential Equations with Linear Algebra. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1976.

Coordinador:

Alberto José Hernández Alvarado

Oficina 1-4 CIMPA, Finca II

[albertojose.hernandez@ucr.ac.cr](mailto:albertojose.hernandez@ucr.ac.cr)

Tel: 25113713