



## CARTA AL ESTUDIANTE

Curso: MA-1022 Cálculo para Ciencias Económicas II  
II Ciclo, 2020

**Tipo de Curso:**

teórico.

**Créditos: 4**

**Requisitos MA-1021 Cálculo para Ciencias Económicas I**

**Co-requisitos: ninguno.**

Estimado estudiante: Reciba la más cordial bienvenida al curso MA-1022 Cálculo para Ciencias Económicas II. En este documento encontrará información sobre algunos aspectos del curso que debe conocer: descripción, objetivos, contenidos, metodología, evaluación, cronograma y referencias bibliográficas. También se detallan los aspectos del horario del curso y los espacios de consulta por parte de los profesores.

Este curso es de modalidad alto virtual. Se ha modificado la forma de brindar el curso por motivo de la emergencia que se está viviendo por la pandemia del COVID-19. El coordinador del curso es el profesor Carlos Robles Padilla y, de ser necesario, lo puede contactar a través del siguiente correo electrónico: [carlos.roblespadilla@ucr.ac.cr](mailto:carlos.roblespadilla@ucr.ac.cr). Se recomienda estar en constante comunicación con el profesor del grupo en el que está matriculado. Además, a la medida de lo posible, procure establecer un grupo de estudio con compañeros del curso. Cualquier cambio que deba realizarse a partir de alguna directriz que se establezca en la universidad se informará oportunamente.

### I. DESCRIPCIÓN

---

Este curso busca incentivar en el estudiantado el desarrollo de la capacidad de abstracción y la habilidad para la modelación, a través de la resolución de ejercicios y problemas contextualizados en dos contenidos generales: álgebra lineal y cálculo diferencial en varias variables. En su proceso de aprendizaje es recomendable mantener una actitud crítica durante el desarrollo de las lecciones, utilizar adecuadamente sus conocimientos previos y aprovechar al máximo el trabajo extraclase asignado. Debe resolver los ejercicios planteados luego del estudio de los conceptos claves, las estrategias de solución planteadas deben ir más allá de la mera aplicación de procedimientos memorizados sin comprensión alguna. Según el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil, la cantidad de créditos de este curso equivale a doce horas semanales de su trabajo en el mismo. Se le recomienda la lectura de dicho reglamento ya que rige los procedimientos de evaluación y orientación académica de cada estudiante de la Universidad de Costa Rica. Puede ser descargado en el siguiente enlace:

[http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen\\_academico\\_estudiantil.pdf](http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen_academico_estudiantil.pdf)

## II. OBJETIVOS

---

### Objetivos generales:

1. Aplicar conceptos, representaciones y procedimientos propios del álgebra lineal y del cálculo diferencial en varias variables, en un contexto de solución de ejercicios y problemas.
2. Desarrollar habilidades que le permitan resolver problemas o situaciones concretas, relacionados con su formación profesional.
3. Valorar la importancia del álgebra lineal y del cálculo diferencial en varias variables en el desarrollo de modelos aplicados en diferentes disciplinas.

### Objetivos específicos: Se espera que el estudiante logre

1. Resolver operaciones que involucren matrices.
2. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante diferentes algoritmos.
3. Clasificar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.
4. Resolver ecuaciones cuya incógnita sea una matriz.
5. Relacionar el cálculo de la inversa de una matriz con el producto de matrices elementales.
6. Calcular determinantes.
7. Aplicar las propiedades básicas del determinante en la simplificación de expresiones.
8. Aplicar las propiedades básicas del álgebra matricial en problemas relacionados con el modelo de Leontief.
9. Interpretar geoméricamente conceptos vectoriales.
10. Utilizar diferentes notaciones para representar una recta y un plano.
11. Calcular la distancia entre puntos, rectas y planos.
12. Interpretar el concepto de función real de varias variables reales.
13. Clasificar superficies cuadráticas dada su ecuación o gráfica.
14. Aplicar el concepto de derivada parcial en problemas de análisis marginal.
15. Determinar una ecuación para el plano tangente y la recta normal a una superficie.
16. Aplicar la regla de la cadena y el teorema de la función implícita en el cálculo de derivadas parciales.
17. Determinar los extremos de funciones de varias variables mediante el criterio del segundo diferencial o el Hessiano.
18. Calcular los extremos absolutos de funciones de varias variables en regiones compactas.
19. Determinar los extremos de funciones de varias variables con restricción de igualdad, mediante multiplicadores de Lagrange.
20. Clasificar los extremos de funciones de varias variables con restricción de igualdad, mediante el método del Hessiano orlado.

### III. CONTENIDOS

---

#### 1. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Matriz, vector fila y vector columna. Algunos tipos de matrices: nula, diagonal, identidad y triangular. Igualdad de matrices. Multiplicación de una matriz por un escalar, suma y producto de matrices. Propiedades básicas del álgebra de matrices. Operaciones elementales sobre las filas de una matriz y matrices elementales. Ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales. Solución y conjunto solución de un sistema. Matriz de coeficientes del sistema y matriz aumentada. Operaciones elementales de las filas de un sistema. Forma escalonada y forma escalonada reducida. Métodos de reducción gaussiana y Gauss-Jordan. Matrices equivalentes y rango de una matriz. Caracterización del conjunto solución de un sistema. Sistemas homogéneos y no homogéneos. Inversa de una matriz y propiedades básicas de las matrices invertibles. Relación entre matrices invertibles y sistemas de ecuaciones lineales. Transposición de matrices y sus propiedades elementales. Modelo de insumo producto de Leontief.

#### 2. Determinantes

Definición de determinante y sus propiedades básicas. Cálculo de determinantes. Regla de Cramer. Relación entre el rango de una matriz y su determinante. Matriz adjunta y su relación con el cálculo de la inversa.

#### 3. Geometría vectorial en el espacio tridimensional

Interpretación geométrica de un vector. Distancia entre dos puntos. Álgebra de vectores. Norma de un vector, vectores canónicos, vector unitario, dirección de un vector, ángulo entre vectores, vectores paralelos y ortogonales. Producto punto y producto cruz. Proyecciones ortogonales. Ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de una recta. Ecuación vectorial, paramétrica y normal de un plano. Distancias entre: un punto y una recta, dos rectas, un punto y un plano, dos planos.

#### 4. Derivación de funciones en varias variables

Funciones de varias variables y su representación geométrica. Superficies cuadráticas sin términos mixtos. Derivadas parciales y su aplicación en análisis marginal. Derivadas direccionales y vector gradiente. Plano tangente y recta normal a una superficie. Regla de la cadena. Teorema de la función implícita.

#### 5. Optimización de funciones de dos y tres variables

Máximos y mínimos (locales y globales), punto crítico y punto silla. Extremos de funciones sobre regiones abiertas. Criterio de la segunda derivada para clasificar extremos locales de funciones de dos variables. Clasificación de puntos críticos mediante los criterios del diferencial de segundo orden o el Hessiano. Máximos y mínimos en regiones compactas. Multiplicadores de Lagrange. Criterio del Hessiano orlado. Problemas de optimización en varias variables con restricción de igualdad.

**OBSERVACIÓN:** De los contenidos presentados, los tres primeros corresponden al área de Álgebra Lineal y los otros dos al Cálculo Diferencial en varias variables. Cada profesor debe abordar cada uno de estos contenidos, ya sea de forma integrada o separada. Dependiendo de las características que se observen en el grupo, se pueden abordar otros temas afines pero de manera formativa.

## IV. METODOLOGÍA

---

Según la modalidad de curso de manera remota, cada profesor del curso tiene una sección en el entorno de Mediación Virtual 2 correspondiente al curso MA-1022 Cálculo para Ciencias Económicas II.

En el curso se procura un balance entre la teoría y la práctica, así como la aplicación de sesiones de manera sincrónica o asincrónica. Cada profesor trabaja con sus grupos de la forma en que considere más oportuna. El profesor informará con antelación la forma de trabajar en cada caso y el estudiante debe estar atento a la información que se indique a través del medio que se haya seleccionado para tal caso.

Cada profesor estará orientando el proceso y se podrán compartir los siguientes insumos: videos creados por el profesor o extraídos de alguna fuente de internet, documentos creados exclusivamente para el curso o documentos de temas asociados donde el profesor indicará qué se utilizará de esas fuentes, prácticas variadas, entre otras. Se reitera que cada profesor indicará qué material es el que se implementará.

A pesar de las circunstancias, se recomienda que el estudiante participe activamente según lo que el docente indique o a partir de la apertura e iniciativa que tenga cada uno. Aunque se incentive una modalidad asincrónica, hay espacios para compartir inquietudes y así poder ver el proceso de los estudiantes. En muchas ocasiones se va a requerir que el estudiante estudie algunos temas antes del encuentro de manera sincrónica, por tanto, se expresa la importancia de cumplir con estas solicitudes para el adecuado avance del curso. Ante las situaciones donde se dificulte la comprensión de los temas del curso, se recuerda la posibilidad de participar de los espacios de hora consulta, aunque también se motiva para que se logren crear algunos grupos de estudio entre los estudiantes para avanzar en conjunto (en Matemática se recomienda poder tener esa oportunidad de contrastar ideas, formas de razonar).

## V. EVALUACIÓN

---

Los estudiantes serán evaluados, según su desempeño, en las siguientes asignaciones:

1. Dos asignaciones individuales con un valor de 10% cada una. Para este tipo de actividad, se habilitará el espacio en una semana determinada el día lunes a las 00:01 y se deshabilitará el viernes de esa semana a las 23:59.
2. Dos tareas grupales con un valor de 20% cada una. Para este tipo de actividad, se habilitará el espacio durante ocho días. Ejemplo: si en una semana se indica que iniciará el día miércoles, entonces el espacio estará disponible desde las 00:01 hasta las 23:59 del siguiente miércoles.
3. Dos evaluaciones parciales con un valor de 20% cada una. Para este tipo de actividad, se programará para los días sábado y estará el entorno habilitado durante 7 horas (09:00-16:00), pero cada estudiante dispone solo de tres horas para la realización de la actividad.

**Observación:** no se están considerando exámenes. Además, hay actividades tanto de forma individual como grupal. También, cada estudiante tendrá a su disposición los materiales que se han estado estudiando durante el curso. De este modo, se motiva para que cada estudiante trabaje cada una de las actividades de manera consciente, responsable. Este es un proceso de formación y corresponde ser consecuente con los deberes y derechos que se poseen como estudiante universitario.

La nota de aprovechamiento final ( $n$ ), será la suma de los porcentajes obtenidos en los rubros mencionados. Esta se expresa en una escala de 0 a 10 y se reportará de la siguiente manera:

- Si su nota  $n$  es igual o superior a 6.75, el estudiante aprueba el curso con la nota  $n$  redondeada al valor más cercano entre: 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5 o 10.0. Los casos intermedios como 7.25 o 7.75 se redondean hacia arriba.
- Si  $5.75 \leq n < 6.75$ , el estudiante tiene derecho a aplicar una actividad de ampliación en el cual debe obtener una nota superior o igual a 6.75 para aprobar el curso con 7.0. En caso contrario, su nota será 6.0 o 6.5, la más cercana a su nota  $n$ .
- Si  $n$  es inferior a 5.75 pierde el curso y su nota final es la nota  $n$  redondeada a la unidad o media unidad más cercana: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0 o 5.5.

**Importante:** para realizar alguna reposición el estudiante debe entregar al profesor la solicitud por medio del correo, acompañada con el documento oficial que justifique debidamente la razón de su ausencia al examen respectivo, según las causas y periodos que el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil considera como válidas. Si la reposición es aprobada, el docente le indicará al estudiante la fecha.

## VI. CRONOGRAMA

Semana	Contenidos o actividades
10-14 de agosto	Matriz, vector fila y vector columna. Algunos tipos de matrices: nula, diagonal, identidad y triangular. Igualdad de matrices. Multiplicación de una matriz por un escalar, suma y producto de matrices. Propiedades básicas del álgebra de matrices.
17-21 de agosto	Operaciones elementales sobre las filas de una matriz y matrices elementales. Ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales. Solución y conjunto solución de un sistema. Matriz de coeficientes del sistema y matriz aumentada. Operaciones elementales de las filas de un sistema. Forma escalonada y forma escalonada reducida. Método de reducción gaussiana.
24-28 de agosto	Método de Gauss-Jordan. Matrices equivalentes y rango de una matriz. Caracterización del conjunto solución de un sistema. Sistemas homogéneos y no homogéneos. Inversa de una matriz y propiedades básicas de las matrices invertibles. Relación entre matrices invertibles y sistemas de ecuaciones lineales.
31 agosto - 4 de septiembre	Transposición de matrices y sus propiedades elementales. Modelo de insumo producto de Leontief.
7-11 de septiembre	Definición de determinante y sus propiedades básicas. Cálculo de determinantes. Regla de Cramer. Relación entre el rango de una matriz y su determinante.
14-18 de septiembre	Matriz adjunta y su relación con el cálculo de la inversa. Reforzamiento de los dos primeros contenidos del curso. <b>I evaluación parcial. (19 de septiembre y se consideran los objetivos 1, 4, 5, 7).</b>

21-25 de septiembre	Interpretación geométrica de un vector. Distancia entre dos puntos. Álgebra de vectores. Norma de un vector, vectores canónicos, vector unitario, dirección de un vector, ángulo entre vectores, vectores paralelos y ortogonales. Producto punto y producto cruz.
28 de septiembre-2 de octubre	Proyecciones ortogonales. Ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de una recta. Ecuación vectorial, paramétrica y normal de un plano. <b><del>I tarea grupal (se asigna el 2 de octubre y se entrega el 9 de octubre. Se consideran los objetivos 6,8,10)</del></b>
5-9 de octubre	Distancias entre: un punto y una recta, dos rectas, un punto y un plano, dos planos. Funciones de varias variables y su representación geométrica. <b>I tarea grupal (se asigna el 9 de octubre y se entrega el 16 de octubre. Se consideran los objetivos 6,8,10)</b>
12-16 de octubre	Superficies cuadráticas sin términos mixtos. Derivadas parciales y su aplicación en análisis marginal. <b><del>I asignación individual (se asigna el 12 de octubre y se entrega el 16 de octubre. Se consideran los objetivos 2, 3, 5, 7, 9, 11).</del></b>
19-23 de octubre	Derivadas direccionales y vector gradiente. Plano tangente y recta normal a una superficie. <b><del>II evaluación parcial. (24 de octubre y se consideran los objetivos 11,12,13).</del></b> <b>I asignación individual (se asigna el 19 de octubre y se entrega el 23 de octubre. Se consideran los objetivos 2, 3, 5, 7, 9, 11).</b>
26-30 de octubre	Regla de la cadena. Teorema de la función implícita. Máximos y mínimos (locales y globales), punto crítico y punto silla. <b>II evaluación parcial. (31 de octubre y se consideran los objetivos 11,12,13).</b>
2-6 de noviembre	Extremos de funciones sobre regiones abiertas. Criterio de la segunda derivada para clasificar extremos locales de funciones de dos variables.
9-13 de noviembre	Clasificación de puntos críticos mediante los criterios del diferencial de segundo orden o el Hessiano. Máximos y mínimos en regiones compactas.
16-20 de noviembre	Multiplicadores de Lagrange. Criterio del Hessiano orlado. <b>II asignación individual (se asigna el 16 de noviembre y se entrega el 20 de noviembre. Se consideran los objetivos 14, 15, 16, 17).</b>
23-27 de noviembre	Problemas de optimización en varias variables con restricción de igualdad. <b>II tarea grupal (se asigna el 25 de noviembre y se entrega el 2 de diciembre. Se consideran los objetivos 16, 17, 18, 19, 20).</b>
Viernes 11 de diciembre	<b>Ampliación del curso.</b>

**Importante:** En Matemática se requieren de muchos conocimientos previos que no se han mencionado en los contenidos ni en el presente cronograma. El profesor introduce los temas que se supone el estudiante debe conocer en el momento que así se requiera y se amplía de ser necesario a través de los insumos que se estarán presentando. Es muy importante que el estudiante considere estas fechas del cronograma. Cada profesor puede variar el orden de los contenidos presentados, pero considerando los plazos necesarios para que el estudiante pueda llevar a cabo las actividades de evaluación ya mencionadas.

## VII. Profesores del curso y horas de consulta

### MA-1022 CÁLCULO PARA CIENCIAS ECONÓMICAS II

Grupo o grupos	Sede o recinto	Nombre del profesor o profesora
001, 002, 003	Rodrigo Facio	Anddy Alvarado Solano
004, 005	Rodrigo Facio	Carlos Robles Padilla
001	Turrialba	Leonel Castro Soto
021	Paraíso	Catalina Camacho Navarro
031	Guápiles	Maynor Jiménez Castro
001	Caribe	Morris Domenech Castro
002	Caribe	Andrés Herrera Rosales
001	Guanacaste	Ólger Navarro Rodríguez
001	Occidente	Wendy Araya Benavides
001	Santa Cruz	Isaías Solórzano Araya

En el entorno de Mediación Virtual se especifica la forma en la cual trabajará cada docente. El primer día de encuentro sincrónico se conversará con los estudiantes y también se tendrá en cuenta el diagnóstico de los recursos digitales que posea cada uno.

Cada estudiante puede asistir a la hora consulta de cualquier profesor de la cátedra. En la sección de documentos podrá encontrar la información de los horarios. Esto se hace con el fin de brindar el mejor acompañamiento posible. Aprovechen los espacios cuando previamente se han repasado los conceptos, se hayan identificado las dificultades y se compartan también los avances en la práctica de los ejercicios que se estarán dando.

## VIII. BIBLIOGRAFÍA

Los dos libros de texto (referencias clásicas) para el curso son los siguientes:

1. GROSSMAN, S Y FLORES, J. (2012). Álgebra Lineal. (7a ed). México DF, México: Mc Graw Hill.
2. STEWART, J. (2012). Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. (7a ed). México DF, México: Cengage Learning.

El primero se utiliza exclusivamente para el tema de Álgebra Lineal, el otro trata los contenidos a partir de geometría vectorial inclusive. Otros libros como referencias bibliográficas complementaria son:

1. ARCE, C., CASTILLO, W. Y GONZÁLEZ, J. (2004). Álgebra Lineal. (3a ed). San José, Costa Rica: EUCR.
2. ARYA, J. Y LARDNER, R. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. (5ed). México DF, México: Pearson.
3. ÁVILA, J. (2017). Cálculo en Varias Variables: una guía para estudiantes. (1a ed). Costa Rica, EUCR.
4. HOFFMAN, BRADLEY, SOBECKI, PRICE, SANDOVAL (2014). Matemáticas aplicadas a la administración y los negocios. (1a ed). México, Mc Graw Hill Education.
5. HOWARD, A (2016). Introducción al álgebra lineal. (5a ed). México DF, México: Limusa.
6. LAY, D. (2012) Álgebra Lineal Elemental y sus Aplicaciones. (4a ed). México DF, México: Pearson.
7. ROGAWSKI, J. (2012). Cálculo: varias variables. (3a ed). Barcelona, España: Reverté.
8. PITA, C. (1995). Cálculo Vectorial (1a ed). Naucalpan de Juárez, México: Prentice Hall Hispanoamérica.
9. ZILL, D., WRIGHT, W. (2011). Cálculo de varias variables. (4 ed). México, Mc Graw Hill.