

Departamento de Ciencias Naturales  
Sede de Occidente  
II Semestre, 2021.



UNIVERSIDAD DE  
COSTA RICA

**PROGRAMA CURSO:  
MA0322 ÁLGEBRA LINEAL**

---

**Datos Generales**

**Sigla:** MA0322

**Nombre del curso:** Álgebra Lineal

**Tipo de curso:** Teórico

**Número de créditos:** 4

**Número de horas semanales presenciales:** 5

**Número de horas semanales de trabajo independiente del estudiante:** 5

**Requisitos:** M0320-MA0321

**Ubicación en el plan de estudio:** Segundo Año

**Horario del curso:** M 17 A 19:50; V 17 a 18:50 (Recinto de San Ramón)  
K 8:00 a 10:50; V 8:00 a 9:50 (Recinto de Tacaes)

**Docentes**

**Grupo 001 (San Ramón)**

Nombre: Jessica Jiménez Moscoso

Correo Electrónico: [jessica.jimenez\\_m@ucr.ac.cr](mailto:jessica.jimenez_m@ucr.ac.cr)

Horario de Consulta:

Enlace para las lecciones sincrónicas:

Nombre: María Fernanda Vargas González

Correo Electrónico: [mariafernanda.vargas@ucr.ac.cr](mailto:mariafernanda.vargas@ucr.ac.cr)

Horario de Consulta: Martes y Viernes de 10:00-12:00

Enlace para las lecciones sincrónicas: <https://udecr.zoom.us/j/86821680499>

**Grupo 002 (Tacaes)**

Nombre: Carlos Márquez

Correo Electrónico: [carlos.marquez@ucr.ac.cr](mailto:carlos.marquez@ucr.ac.cr)

Horario de Consulta:

Enlace para las lecciones sincrónicas:

Nombre: Ana Patricia Maroto Vargas

Correo Electrónico: [ana.maroto@ucr.ac.cr](mailto:ana.maroto@ucr.ac.cr)

Horario de Consulta:

Lunes: 4:00-5:00

Martes: 11:00-12:00

Jueves 3:00-5:00

Viernes 10:00-12:00

Enlace para las lecciones sincrónicas: <https://udecr.zoom.us/j/81486000212>

## **I Descripción:**

1. Este curso brinda las herramientas básicas que son esenciales en muchos campos de estudio. Su utilidad práctica se ha consolidado en la explicación de principios fundamentales y en la simplificación de cálculos en distintas ramas como ingeniería, ciencias de la computación, matemáticas, física, biología, procesamiento de imágenes, economía y estadística, lo que esperamos se convierta en un estímulo para el trabajo que deberán realizar en el curso.
2. Dotar al estudiante de la maquinaria del álgebra lineal necesaria. Para lograr este fin el curso inicia con la teoría de matrices de componentes reales y su relación con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.
3. Posteriormente se utilizarán herramientas algebraicas en la resolución de problemas de tipo geométrico. En la segunda parte del curso se tiene al estudio de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión finita. Finalmente se hace una aplicación al estudio de las formas cuadráticas. A cada concepto principal tratado se le dará una interpretación geométrica, lo cual ayudará a visualizar mejor los conceptos.
4. En este curso se requiere que el estudiante desarrolle su capacidad de pensamiento abstracto. Se busca que obtenga conclusiones sobre cómo resolver un problema, reconociendo las hipótesis planteadas, y utilizar los conceptos teóricos en el planteamiento de la solución de dicho problema.
5. Este curso es uno de los más útiles para los estudiantes de Computación. Es el primer curso en que los conceptos tienen tanta importancia como los cálculos. Es además un curso para motivar las aplicaciones.
6. Este curso presenta la totalidad de los conceptos del álgebra lineal en un marco concreto antes de pasar a considerarlos con toda generalidad. Además, se hace hincapié en la intuición geométrica.
7. Este curso se considera alto virtual. Se trabajará utilizando las plataformas zoom y mediación virtual.

## **II Objetivos generales del curso:**

1. Contribuir a la formación matemática del estudiante, esencial para describir, entender y resolver problemas propios de su disciplina.
2. Fomentar el uso correcto del lenguaje de la matemática y desarrollar la habilidad para expresar ideas de manera rigurosa y coherente.
3. Proporcionar al estudiante conocimientos y habilidades básicas del álgebra, los cuales serán instrumentos necesarios en el aprendizaje y aplicación de otros conocimientos vinculados a las empresas.
4. Desarrollar las capacidades del estudiante como la modelización formal y posterior resolución de problemas que puedan surgir en diversos ámbitos de la informática.
5. Contribuir a la formación matemática del estudiante, esencial para describir, entender y resolver problemas propios de su disciplina.

6. Contribuir al desarrollo del estudiante, de su habilidad para interpretar y deducir analíticamente resultados del álgebra lineal y aplicar éstos a su disciplina de estudio.
7. Fomentar el uso correcto del lenguaje de la matemática y desarrollar la habilidad para expresar ideas de manera rigurosa y coherente.

### III Objetivos específicos:

---

1. Aplicar algoritmos convenientes para resolver sistemas de ecuaciones lineales y expresar, en forma adecuada, el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
2. Conocer el álgebra de matrices y el cálculo de determinantes, así como sus propiedades, para aplicarlo adecuadamente a la solución y análisis de los sistemas de ecuaciones lineales.
3. Determinar, si existe, la inversa de una matriz cuadrada.
4. Conocer y aplicar la geometría vectorial a diferentes tipos de problemas.
5. Conocer la estructura de espacio vectorial y espacios vectoriales relacionados con matrices y polinomios.
6. Identificar los espacios vectoriales de dimensión finita de su geometría y poder generalizar los conceptos de recta y plano.
7. Conocer y aplicar las propiedades básicas del producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ .
8. Determinar si un conjunto de vectores constituye una base para un espacio vectorial y obtener una base ortogonal a partir de una base dada.
9. Conocer las propiedades básicas de las transformaciones lineales y su relación con el álgebra de matrices.
10. Determinar si una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  es una transformación lineal y representar una transformación de este tipo mediante una matriz.
11. Determinar transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita.
12. Determinar bases para el núcleo y la imagen de una transformación lineal.
13. Representar una transformación lineal mediante una matriz, asociada a cualquier par de bases dadas de su dominio y de su codominio respectivamente.
14. Determinar matrices de cambio de bases y relacionarlas con la representación matricial de una transformación lineal.
15. Obtener los valores propios de una matriz y los espacios propios asociados a cada valor propio.
16. Determinar si una matriz o una transformación lineal, es diagonalizable o no.

## IV Contenidos:

---

### 1- Matrices

Concepto general de una matriz. Matrices especiales: cuadrada, diagonal, identidad, triangular superior y triangular inferior, simétrica, antisimétrica, vector fila y columna. Álgebra de matrices: suma y multiplicación de matrices, y multiplicación por escalar. Propiedades básicas del álgebra de matrices.

### 2- Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Sistemas de  $n$  ecuaciones lineales en  $m$  variables homogéneos y no homogéneos. Solución y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Matriz de coeficientes y matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales. Operaciones elementales sobre las filas de una matriz. Matrices equivalentes. Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes y su relación con las operaciones elementales sobre las filas de una matriz. Forma escalonada y forma escalonada reducida. Rango de una matriz. Método de reducción de Gauss-Jordan. Solución de un sistema de ecuaciones lineales que depende de uno o más parámetros. Sistemas consistentes, inconsistentes, con solución única y con infinitas soluciones. Factorización L.U. de una matriz.

### 3- Matrices invertibles

Inversa de una matriz y matrices invertibles. Método de Gauss-Jordan para hallar la inversa de una matriz. Matrices invertibles y sistemas lineales. Matriz transpuesta y sus propiedades. Ecuaciones con matrices.

### 4- Determinantes

Definición del determinante de una matriz cuadrada y sus propiedades elementales. Menores y cofactores de una matriz  $n \times n$ . Cálculo del determinante de una matriz triangular. Determinante de una matriz invertible. Determinante de la transpuesta de una matriz. Cálculo de determinantes aplicando operaciones elementales sobre las filas y/o columnas de matriz. Relación entre el rango de una matriz y su determinante.

### 5- Geometría vectorial

Representación geométrica de un vector. Suma y resta de vectores, representación geométrica y propiedades. Producto escalar de vectores y sus propiedades. Norma de un vector. Ángulo entre dos vectores. Producto cruz en  $\mathbb{R}^3$  y sus propiedades. Aplicaciones al cálculo de áreas. Proyecciones ortogonales en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

### 6- Rectas y planos

Descripción de una recta en  $\mathbb{R}^3$ . Ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de una recta en  $\mathbb{R}^3$ . Planos en  $\mathbb{R}^3$ . Ecuación vectorial y normal de un plano en  $\mathbb{R}^3$ . Distancias entre dos

puntos. Distancia entre un punto y una recta. Distancia entre dos planos. Distancia entre un punto y un plano.

### 7-Espacios vectoriales

Definición y propiedades básicas de los espacios vectoriales. Ejemplos de espacios vectoriales. Subespacio vectorial. Combinación lineal de un conjunto de vectores de un espacio vectorial. Conjunto generador de un espacio vectorial. Bases ordenadas y dimensión de un espacio vectorial. Coordenadas de un vector con respecto a una base ordenada. Espacio fila y espacio columna de una matriz. Intersección y suma de subespacios vectoriales.

### 8-Ortogonalidad y proyecciones

Conjuntos de vectores, bases y subespacios ortogonales. Bases ortonormales. Complemento ortogonal de un subespacio. Proyección ortogonal sobre un subespacio vectorial. Método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

### 9-Transformaciones lineales

Concepto de transformación lineal. Determinación de una transformación lineal conocida su acción sobre una base. Núcleo e imagen de una transformación lineal. Inyectividad y sobreyectividad de una transformación lineal. Relación entre las dimensiones del dominio, el núcleo y la imagen de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Transformación lineal asociada a una matriz. Espacio nulo y espacio imagen de una matriz. Composición de transformaciones lineales. Matriz de cambio de base. Rotaciones. Transformaciones lineales invertibles.

### 10-Valores y vectores propios: Diagonalización

Concepto de valor y vector propio. Subespacio asociado a un valor propio. Polinomio característico de una matriz. Multiplicidad algebraica y geométrica. Diagonalización de matrices. Matrices ortogonalmente diagonalizables. Valor y vector propio de una transformación lineal. Diagonalización de transformaciones lineales. Transformaciones lineales ortogonalmente diagonalizables.

### **V Cronograma:**

Este cronograma es una guía de la distribución semanal de los contenidos del curso, cada docente está en libertad de exponer los conceptos y realizar la práctica que considere necesaria según su estilo y en el orden que desee, siempre que no altere los contenidos que debe cubrir para cada examen parcial. Se realizarán ajustes según el avance del curso.

<b>1</b>	16 al 20 de agosto	Tema 1: Matrices y Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices
<b>2</b>	23 al 27 de agosto	Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

3	30 de agosto al 03 de septiembre	Tema 3: Matrices invertibles
4	06 al 10 de septiembre	Tema 4: Determinantes
5	13 al 17 de septiembre	Tema 5: Geometría Vectorial
6	20 al 24 de septiembre	<b>Repaso I Parcial Temas 1, 2, 3 y 4 para I Parcial</b>
		<b>Primer parcial / 25 de septiembre / 1 pm</b>
7	27 de septiembre al 01 de octubre	Tema 6: Rectas y planos
8	04 al 08 de octubre	Tema 7: Espacios vectoriales
9	11 al 15 de octubre	Semana de desconexión
10	18 al 22 de octubre	Tema 7: Espacios vectoriales
	25 al 29 de octubre	<b>Repaso II Parcial Temas 5, 6, 7 y 8 (primera parte)</b>
11		<b>Segundo parcial / 30 de octubre / 1 pm</b>
12	01 al 05 de noviembre	Tema 8: Ortogonalidad y proyecciones
13	08 al 12 noviembre	Tema 9: Transformaciones lineales
14	15 al 19 de noviembre	Tema 10: Valores y vectores propios, diagonalización
15	22 al 26 de noviembre	Tema 10: : Valores y vectores propios, diagonalización
16	29 de noviembre al 03 de diciembre	<b>Repaso III Parcial Temas 8 (segunda parte), 9 y 10</b>
		<b>Tercer parcial / 4 de diciembre / 1 pm</b>

## **VI Evaluación**

Se realizarán tres exámenes parciales con el mismo peso (10/3), para obtener así la nota de aprovechamiento NA.

### **Reporte de la nota final**

1. Para efectos de promoción rigen los siguientes criterios, los cuales se refieren a la nota de aprovechamiento NA indicada arriba, expresada en una escala de 0 a 10, redondeada, en enteros y fracciones de media unidad, según el reglamento vigente:

**Si NA es mayor que 6,75 el estudiante gana el curso con calificación NA redondeada a la media más próxima, los casos intermedios como 7,25 se redondean hacia arriba, es decir, 7,5**

**Si  $5,75 < NA < 6,75$ , el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación, en el cual se debe obtener una nota superior o igual a 7 para aprobar el curso con nota 7, en caso contrario su nota será 6,0 o 6,5, la más cercana a NA.**

**Si  $NA < 5,75$  pierde el curso.**

2. La calificación final del curso se notifica a la Oficina de Registro e Información, en la escala de cero a diez, en enteros y fracciones de media unidad.

3. El examen de ampliación estará dividido en tres secciones correspondientes a los contenidos de cada examen parcial. Los estudiantes que por su nota de aprovechamiento tengan derecho a realizar el examen de ampliación repondrán la sección o secciones en las que su nota en el examen parcial correspondiente fue inferior a 7.0.

## **VII Calendario de exámenes**

Las fechas de las pruebas parciales son las siguientes:

Examen	Día	Hora
--------	-----	------

Parcial I	Sábado 18 de septiembre	1 pm
Parcial II	Sábado 16 de octubre	1pm
Parcial III	Sábado 04 de diciembre	1 pm
Ampliación	Miércoles 15 de diciembre	1 pm

### Uso de calculadoras:

En los exámenes solamente se permitirán calculadoras científicas básicas o de menor potencia, es decir, no está permitido el uso de calculadoras programables. Tampoco se permite el uso del teléfono ni aparatos electrónicos similares.

**Disposiciones para la realización de las evaluaciones:** Los exámenes son de cátedra y su resolución es en forma individual y sin la utilización de materiales de apoyo. No está permitido que el estudiante utilice su celular, tabletas o cualquier otro medio de comunicación electrónico durante los exámenes para realizar consultas sobre las preguntas del examen. Cualquier intento de copiar en el examen será sancionado de acuerdo con lo que estipula el reglamento correspondiente.

### Exámenes de reposición:

Se realizará a aquellos estudiantes con ausencia justificada a un examen tales como enfermedades (con justificación médica), o choques de exámenes (con respectivo profesor). Se debe realizar la justificación en los cinco días hábiles siguientes después de realizada la prueba.

### Calificación de exámenes:

1. El profesor debe entregar a los alumnos los exámenes calificados y sus resultados, a más tardar 10 días hábiles después de haberlos efectuados, de lo contrario, el estudiante podrá presentar reclamo ante la el coordinador de sección.
2. La pérdida comprobada de un examen por parte del profesor da derecho al estudiante a una nota equivalente al promedio de sus calificaciones, o a criterio del estudiante, a repetir el examen.
3. El estudiante tendrá derecho a reclamar ante su docente lo que considere mal evaluado del examen, en los tres días hábiles posteriores a la finalización del plazo señalado en el inciso anterior.
4. Más detalles de los puntos anteriores y otros (como pérdida de exámenes, reclamos) el estudiante puede consultar el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil.

## VIII Metodología y Recursos

En las clases se utiliza la técnica expositiva con posibilidad de involucrar a los estudiantes y si es posible, usar recursos tecnológicos. Las clases se deben complementar con trabajo individual por parte de cada estudiante para la resolución de ejercicios y asimilación de la materia. Se utilizarán la plataforma institucional **Mediación Virtual** en modalidad virtual

alta. En ese sitio se publicarán anuncios pertinentes al curso, y además, se pueden encontrar documentos útiles como prácticas, exámenes de semestres anteriores, la carta al estudiantado, notas de clase, etc. Para ingresar a esta plataforma, se debe usar la información del correo institucional. Además, las lecciones se realizarán a través de zoom.

## IX Bibliografía

---

1. Arce, C., Castillo, W., & González, J. *Álgebra Lineal*. Escuela de Matemática.
2. Barrantes, Hugo. (2012). *Álgebra lineal*. (Segunda Edición). Editorial UNED.
3. Nakos, G. Joyner y D. *Álgebra lineal (con aplicaciones)*. Editorial Thomson, edición. 1999.
4. Grossman, Stanley I. (2007). *Álgebra lineal*. (Sexta edición). Editorial McGraw Hill,. (Varias ediciones de este libro se pueden acceder en la base de datos de la biblioteca con su usuario y clave institucional:  
[https://primo-tc-na01.hosted.exlibrisgroup.com/primo\\_library/libweb/action/search.do;jsessionid=A57AD678AAF6E4F76B369805361187B2?fn=search&ct=search&initialSearch=true&mode=Basic&tab=sibdiucr\\_tab&indx=1&dum=true&srt=rank&vid=SIBDI&frbg=&vl%28freeText%29=grossman+algebra+lineal&scp.scps=scope%3A%28ucr\\_dspace%29%2Cscope%3A%28506UCR%29%2Cscope%3A%28ucr\\_aleph%29%2Cscope%3A%28ucr\\_sfx%29%2Cprimo\\_central\\_multipl\\_e\\_fe&vl%28725759891UI0%29=any&vl%28725759891UI0%29=title&vl%28725759891UI0%29=any](https://primo-tc-na01.hosted.exlibrisgroup.com/primo_library/libweb/action/search.do;jsessionid=A57AD678AAF6E4F76B369805361187B2?fn=search&ct=search&initialSearch=true&mode=Basic&tab=sibdiucr_tab&indx=1&dum=true&srt=rank&vid=SIBDI&frbg=&vl%28freeText%29=grossman+algebra+lineal&scp.scps=scope%3A%28ucr_dspace%29%2Cscope%3A%28506UCR%29%2Cscope%3A%28ucr_aleph%29%2Cscope%3A%28ucr_sfx%29%2Cprimo_central_multipl_e_fe&vl%28725759891UI0%29=any&vl%28725759891UI0%29=title&vl%28725759891UI0%29=any)
5. Fonseca Mora, Christian. (2012). *Ejercicios de Álgebra Lineal*. Universidad de Costa Rica-Facultad de Ciencias- Escuela de Matemática.
6. Cobos Gabala, Fco. Javier; Osuna, Lucena y Robles Arias Rafael. *Apuntes de Álgebra lineal (Ingeniería técnica en informática de gestión)*. Universidad de Sevilla.
7. Echeverría, Mariano. Apuntes de Álgebra lineal. Cátedra MA1004.
8. Sánchez, Jesús. (2020). MA1004 Álgebra Lineal: Exámenes Resueltos.