## 5.7 Cálculo de áreas mediante integración

Comentario:

Esta sección retoma la cuestión del área tal como la dejó las secciones 5.2 y 5.3 donde se introdujo la integral definida.

Si bien es cierto que se ha probado la utilidad de la integral definida para calcular áreas, debe dársele al estudiante una panorámica mayor de la aplicabilidad de la integral como por ejemplo en Ecuaciones diferenciales aplicadas de Murray R. Spiegel. Capítulo 3.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz de calcular áreas mediante integración.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular el área entre una curva y el eje de las absisas
2. Calcular áreas entre dos curvas

Referencia:

De la página 286 a la página 295. Ejercicios del 1 al 46.

# CAPITULO 7

Tiempo asignado: 2 semanas

## Función exponencial y logarítmica

### 7.1 Introducción

Comentario:

Este capítulo se inicia con la definición de leyes de los exponentes para todo exponente racional (tabla 1) para luego cuestionarnos con un exponente irracional, con la idea de motivar el estudio de la función $f(x) = a^x$ : función exponencial de base a, como una generalización de la anterior.

Luego "viendo" el gráfico obtiene la función inversa: la función logarítmica de base a, $\log_a x$ (ver sección 2.3). Siguiendo con las leyes de los logaritmos para por último calcular la derivada de las funciones logarítmica y exponencial.

Objetivo:

En esta sección se introduce el número $e \approx 2{,}71828$; la función exponencial (y sus propiedades) y la función logarítmica (y sus propiedades) con sus respectivas derivadas.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Conocer y manejar las leyes de los exponentes

2. Conocer y graficar las funciones logarítmica y exponencial para distintas bases

3. Conocer y manejar las leyes de los logaritmos

4. Derivar funciones que involucren logaritmos y exponenciales

Referencia: De la página 374 a la página 379. Ejercicios del 1 al 50.

## 7.2 Logaritmos naturales: $y = \ln x$

**Comentario:**

En la introducción se hizo un enfoque informal de esta función, desde un punto de vista pre-cálculo matemático.

Ahora se estudiará la función logarítmica desde el punto de vista del cálculo, definiéndola como una integral y deduciendo sus propiedades, continuidad y crecimiento para $x > 0$, así como el comportamiento de esta función en los extremos de su dominio.

**Objetivo:**

Que el estudiante sea capaz de conocer la definición del logaritmo natural, su gráfico y propiedades.

**Lo que el estudiante debe saber hacer:**

1. Definición de la función logaritmo natural
2. Las leyes de logaritmos
3. Gráfico de la función $\ln x$
4. Derivar funciones que involucren logaritmos
5. Calcular integrales del tipo $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$ o reducibles a ella
6. Graficar funciones que involucren logaritmos

**Referencia:**

De la página 379 a la página 387. Ejercicios del 1 al 56.

7.3 La función exponencial

Comentario:

Se introduce la función exponencial natural como la inversa de la función ln x. Se demuestra su derivada y su integral. Luego se estudia su comportamiento en los extremos de su dominio para graficar funciones que involucren funciones exponenciales.

Concluye la sección estudiando e como un límite.

Objetivo:

El alumno debe ser capaz además de conocer y graficar las leyes de exponentes, conocer y graficar la función exponencial; calcular derivadas e integrales que involucren dicha función

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Definir la función exponencial natural
2. Las leyes de exponentes
3. Graficar funciones que involucren la exponencial natural
4. Derivar funciones que involucren la exponencial natural
5. Calcular integrales que involucren la exponencial natural
6. Calcular límites de la forma: $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

Referencia:

De la página 389 a la página 395. Ejercicios del 1 al 57.

7.4 <u>Funciones exponencial y logarítmica generales</u>

Comentario:

En esta sección se estudia la función exponencial y logarítmica para cualquier base $0 < a \neq 1$, así como la función potencia general: $f(x) = x^r$ para $x > 0$.

Termina la sección mostrándonos las benevolencias de la diferenciación logarítmica para expresiones complicadas.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de derivar e integrar expresiones que involucren funciones exponencial y logarítmica en cualquier base, así como la función potencia general. Derivar expresiones usando diferenciación logarítmica.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Derivar e integrar expresiones que contengan las funciones exponencial y logarítmica generales
2. Usar diferenciación logarítmica

Referencia:

De la página 396 a la página 401. Ejercicios del 1 al 52.

# CAPITULO 8

Tiempo asignado: 1 semanas

## Funciones Trigonométrica (e Hiperbólicas)

### 8.1 Introducción:

Comentario:

En este capítulo se estudian unas funciones trascendentes de caracter elemental llamadas trigonométricas por sus múltiples aplicaciones a la ciencia así como base de ciertos métodos importantes de integración.

La amplitud, período, desface, dominio, rango de las funciones trigonométricas y sus inversas debe ser del conocimiento del alumno (estudiado en MA0125) así como las relaciones entre ellas.

Aquí veremos las funciones trigonométricas desde el punto de vista del cálculo diferencial e integral.

Referencia:

Página 434 del texto.

## 8.2 Derivadas e integrales de las funciones trigonométricas

Comentario:

En las secciones 3.6 y 3.7 se estudió las derivadas de las funciones seno y coseno usando la definición y usando la regla del cociente se calculó las derivadas de las 4 restantes, así como la combinación de éstas con la regla de la cadena.

Usando estos resultados se obtiene la tabla mínima para integrar algunas fracciones trigonométricas y también se necesitan algunos trucos para obtener otras.

Hay que hacer énfasis en la necesidad de memorizar tanto la tabla de integrales como de las identidades trigonométricas para un buen resultado.

Objetivo:

Aparte de que debe saber las derivadas de las funciones trigonométricas combinada con la regla de la cadena, debe saber calcular integrales de funciones trigonométricas, sin olvidar que algunos casos especiales (como potencias y combinaciones de ellas) se retoman en la sección 9.3.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular integrales y derivadas que involucren funciones trigonométricas

2. Aplicar las reglas de derivación y regla de la cadena

3. Transformar integrales haciendo uso de identidades trigonométricas u otros artificios matemáticos para llegar a la tabla.

Referencia:

De la página 434 a la página 438. Ejercicios del 1 al 60.

## 8.3 Funciones trigonométricas inversas

Comentario:

En esta sección se definen las funciones trigonométricas inversas, sus derivadas e integrales.

Al ser sus derivadas funciones algebraicas, resultan útiles para el cálculo de integrales por medio del teorema fundamental.

Al no ser las funciones trigonométricas uno-uno, carecen de funciones inversas. Las funciones aquí definidas son inversas del subconjunto de funciones trigonométricas. El dominio de estos subconjuntos se elige de manera arbitraria, pero con dos criterios: la función resultante tiene que ser uno-uno y su inversa tiene que tener una fórmula única para su derivación.

Las fórmulas para las derivadas se obtienen haciendo uso de la relación existente entre la derivada de una función uno-uno y la de su inversa.

Las fórmulas para las integrales se obtienen haciendo uso del teorema fundamental.

Objetivo:

El objetivo fundamental es poder definir, graficar y derivar las funciones trigonométricas inversas así como poder calcular integrales cuyo resultado sean dichas funciones.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Definir las funciones trigonométricas inversas
2. Dominio y rango de cada una de ellas
3. Graficar las funciones trigonométricas inversas
4. Derivar estas funciones
5. Calcular integrales cuyos resultados sean funciones trigonométricas inversas (llegando a ello por sustitución de otro artificio matemático).



Referencia: De la página 439 a la pagina 447. Ejercicios del 1 al 55.

CAPITULO 9

Tiempo asignado: 3 semanas

Técnicas de Integración

9.1 Introducción:

Comentario:

Este capítulo desarrolla técnicas para hallar primitivas. Las técnicas más generales del capítulo son: el método de sustitución, integración por partes, integración de potencias de funciones trigonométricas, sustitución trigonométrica, integración de funciones racionales de seno y coseno, etc.

Es bueno recordar que la integración no es un proceso rutinario como lo es la diferenciación. En realidad, encontrar antiderivadas es un arte que depende de la experiencia y de la práctica. No obstante, existen ciertas técnicas cuyo uso sistemático puede reducir sustancialmente nuestra dependencia en la casualidad y en la sola intuición y éstas deben aplicarse, mientras no desarrolle la habilidad, en el orden en que son estudiadas.

Referencia:

Página 472 del texto.

## 9.2 Tablas de integrales y sustituciones simples

Comentario:

Desarrollar la técnica de integración por sustitución, que es la técnica fundamental para la obtención de antiderivadas, está basado en la regla de la cadena y en la lista de integrales inmediatas (ver tabla 9.1, pág. 473).

Para aplicar con éxito esta técnica, hace falta una cierta facilidad para reconocer y relacionarla con una de las formas tipo en una función integrando dado una vez superado este caso, queda el comienzo expédito para una sustitución formal o para ajustes del integrando insertando constantes, de modo que le sea aplicable la regla de la cadena.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de recordar una tabla mínima de integrales y de aplicar el método de sustitución para transformar el integrando en alguna de la tabla.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Escribir de memoria las integrales de la tabla 9.1.
2. Integrar por el método de sustitución.

Referncia:

De la página 472 a la página 475. Ejercicios del 1 al 45.

9.3 Integrales trigonométricas

Comentario:

Esta sección se ocupa del método para integrar expresiones que contienen funciones trigonométricas en su integrando.

Es bueno hacer énfasis en la necesidad de memorizar algunas identidades trigonométricas, así como las integrales inmediatas de algunas de estas funciones y sus derivadas.

Objetivo:

Estudiar como calcular integrales que contienen funciones como $\operatorname{sen}^m x$; $\cos^n x$; $\tan^m x$; $\sec^n x$; $\cot^m x$, $\operatorname{cosec}^n x$ y algunos productos de éstas en sus integrandos. El problema se subdivide en casos que dependen de la pariedad de m y n.

Lo que el estudiante debe saber:

1. Aplicar el método de sustitución a las integrales de funciones trigonométricas.
2. Transformar el integrando haciendo uso de identidades trigonométricas.
3. Integrar funciones trigonométricas y productos de potencias de éstas.

Referencia:

De la página 475 a la página 480. Ejercicios del 1 al 35.

## 9.4 Integración por partes:

Comentario:

Esta sección explica el método de integración por partes, método basado en la regla de derivación para un producto de funciones.

Se consideran casos que requieren sucesivas integraciones por partes así como debe aplicarse este método a integrales definidas. Se incluyen ejemplos en los que al aplicar la regla vuelve a aparecer la integral I de origen, lo que permite despejar I en la igualdad resultante.

Para adquirir práctica en la integración por partes, es conveniente ordenar el trabajo en forma sistemática y explicar la problemática de escoger bien el u y el dv para integrar u dv.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de integrar por el método de integración por partes.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Utilizar el método de integración por partes
2. Para ello es necesario identificar bien u, el dv en la integral u dv
3. Usar los diferenciales para calcular el du el v.

Referencia:

De la página 480 a la página 485. Ejercicios del 1 al 35.

9.5 Sustitución Trigonométrica:

Comentario:

Esta sección se ocupa de integrales que contiene en sus integrandos expresiones algebraicas tales como: $(a^2 - u^2)^n$, $(u^2 - a^2)^n$ y $(a^2 - u^2)^n$.

Como su nombre lo indica, es sustituir la variable u por una función trigonométrica, por lo que es bueno hacer énfasis en la necesidad d de memorizar algunas identidades trigonométricas, así como las integrales inmediatas de algunas funciones trigonométricas y sus inversas (sin olvidarnos del dominio).

Puesto que el paso final consiste en expresar la respuesta en la variable original, es necesario el dominio del triángulo rectángulo que nos relaciona u con $\Theta$. (no se harán sustituciones con trigonométricas hiperbólicas).

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de integrar por sustitución trigonométrica.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Hacer sustituciones trigonométricas convenientes en integrandos que aparezcan expresiones como $(a^2 - u^2)^n$; $(u^2 - a^2)^n$ o $(a^2-u^2)^n$
2. Dominar las identidades trigonométricas básicas.
3. Dominar las inversas trigonométricas y sus dominios.
4. Dominar el triángulo rectángulo que nos relaciona el ángulo $\Theta$ con la variable original u para dar la respuesta.

Referencia:

De la página 486 a la página 491. Ejercicios del 1 al 35.

9.6 Integrales que contienen polinomios cuadráticos

Comentario:

El objetivo de esta sección es estudiar algunas técnicas para integrar ciertas funciones racionales, en particular, cuando el integrando contiene una raíz cuadrada o potencia negativa de un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ el cual suponemos sea irreducible y que luego de algún trabajo algebraico nos permita utilizar un método de sustitución adecuado.

Objetivo:

Calcular integrales cuyo integrando contenga una raíz cuadrada o potencia negativa de un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ mediante el proceso de completar cuadrado, transformándose en una rama o en una diferencia de cuadrados, para luego usar el método de sustitución trigonométrica.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Completar cuadrados
2. Aplicar el método de sustitución algebraico o trigonométrico a una función racional simple
3. Reconocer de memoria ciertas integrales inmediatas.
4. Separar integrales en otras más simples con el mismo denominador.

Referencia:

De la página 491 a la página 496. Ejercicios del 1 al 28.

## 9.7 Fracciones racionales y fracciones parciales

Comentario:

El objetivo de esta sección es estudiar los métodos de integración de funciones racionales usando fracciones parciales.

Este método se extiende a casos en que el numerador es de grado igual o mayor al grado del denominador, en cuyo caso se dice que la fracción racional no es "propia", por lo cual debe efectuarse la división hasta obtener un resto con grado menor que el grado del denominador.

El resto de la sección está dedicado al método de las fracciones parciales. Se describen las formas de descomposición, pero no se dan aquí los teoremas que establecen la existencia de dichas formas. Estos pueden encontrarse en algunos libros de álgebra, como por ejemplo: Theory of Equations de C. C. Mac Duffee, New York, Wiley, 1954.

Objetivo:

Que el alumno sea capaz de calcular cualquier integral cuyo integrando sea una función racional.

Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Dividir polinomios de modo que el resto tenga grado menor que el grado del divisor
2. Descomponer funciones racionales por el método de fracciones parciales
3. Integrar cada uno de los términos de la descomposición.

Referencia:

De la página 496 a la página 504. Ejercicios del 1 al 35.

## 9.8 Sustituciones Racionales:

### Comentario:

Esta sección tiene por objetivo desarrollar la técnica de integrar funciones racionales mediante sustituciones algebraicas o trigonométricas, transformando primero el integrando a una función racional de u, que ya es posible integrar mediante fracciones parciales u otros métodos.

### Objetivo:

Que el estudiante sea capaz de calcular integrales cuyo integrando involucre radicales en el numerador y/o en el denominador, así como funciones racionales de seno y coseno.

### Lo que el estudiante debe saber hacer:

1. Calcular integrales usando sustituciones algebraicas o trigonométricas transformando el integrando en una función racional de variable u.

2. Calcular integrales de funciones racionales de seno y coseno mediante la sustitución $u = \tan \frac{\theta}{2}$

### Referencia:

De la página 505 a la página 509. Ejercicios del 1 al 20.