MA 0317 -MA 0350

CALCULO EN UNA VARIABLE II

5 horas semanales
Requisitos MA :0250

I. INTRODUCCION

1. Descripción del curso

Este es el segundo curso de una secuencia de tres cursos de cálculo : dos de cálculo en una variable y uno de cálculo en varias variables. A lo largo de esta secuencia se cubren los temas usuales del cálculo y la geometría analítica, presentando el material de una manera rigurosa, así como haciendo énfasis en las aplicaciones , planteamiento y resolución de problemas. Se trata de dar a la vez, un marco histórico a los temas presentados, para complementar el conocimiento específico del matemático con el conocimiento del desarrollo del cálculo a través del tiempo.

Aunque esta secuencia ha sido diseñada para los estudiantes de matemática y enseñanza de la matemática, ės un excelente sustituto para la secuencia de cálculo usual, que cursan los estudiantes de otras carreras; especialmente aquellas que requieren de una formación básica , sólida en matemática, como ingenierías, física, química y economía.

2. Marco Histórico

Algunas de las más grandes preocupaciones de los matemáticos de todos los tiempos han sido las de poder calcular el área de superficies acotadas por líneas curvas, el volumen de ciertos cuerpos y la longitud de arcos.

Los egipcios y babilonios , por ejemplo, no tenían problemas para determinar exactamente áreas de superficies acotadas por rectas pero nunca pudieron hacerlo para superficies más complicadas. En relación con el cálculo de volúmenes, la hazaña más grande de los matemáticos egipcios es la solución del problemas número 14 del papiro de Moscú que consiste en hallar el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada; aparentemente usando la fórmula $V = \frac{1}{3} [a^2 + b^2 + ab]$. Sin embargo siempre se ha insistido en que la matemática de los pueblos del antiguo oriente no había alcanzado el nivel de abstracción necesario para expresar conceptos matemáticos mediante fórmulas.

Los intentos de los egipcios por lograr determinar exactamente el área del círculo fueron infructuosas, sin embargo, obtuvieron resultados notables tratando de aproximar su superficie mediante un cuadrado. Este intento plasmado en el problema número 48 del papiro de Rhind les permitió incluso obtener la aproximación del número pi con un decimal exacto.

Con el correr de los siglos, cuando la matemática de los pueblos del antiguo oriente pasó a formar parte del acervo cultural de los griegos, el problema número 48 del papiro de Rhind se convirtió en el célebre problema de la cuadratura del círculo: problema que ejercería una notable influencia en el intento por hallar el área de superficies acotadas por líneas curvas. El intento de hallar un cuadrado que tuviese la misma área que un círculo dado, se dasarrolló en dos direcciones: la primera estuvo orientada hacia la geometría en el sentido de Euclides; la segunda orientada hacia los métodos de cálculo que llegarían a conformar las bases del cálculo integral.

Muchos fueron los matemáticos griegos que se destacaron, intentando resolver el problema de la cuadratura del círculo mediante regla y compás, como lo exigía la tradición matemática de la época, sin embargo, muy pocos ,entre los cuales el primero es Arquímedes (297-212 a C) , fueron los que dieron el carácter y la dirección que ahora nos interesa; la dirección del cálculo integral.

Cuando Arquímedes aproximó el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos, utilizando implícitamente el concepto de límite, no sospechó que estaba desarrollando las primeras ideas del cálculo integral; la herramienta más formidable para estudiar nuestro universo cercano.

Arquímedes , además de desarrollar la idea de aproximación del área del círculo mediante polígonos- idea que históricamente se le atribuye primero a Antifon (478-411 a C)-de mucha importancia para nuestros objetivos, fué el primero que comprendió plenamente que los fenómenos de la naturaleza podían estudiarse mediante la matemática, cuestión que en esa fecha no era de interés de los filósofos y los matemáticos griegos. El grado notable de especulación y abstracción a la cual habían llevado la matemática y la geometría , los había conducido a plantear claramente que de la realidad no podía hacerse ciencia y en consecuencia la geometría y la aritmética no debían dedicarse a tales asuntos. La geodesia o geometría práctica y la logística, un capítulo de la aritmética, se ocupaban de los problemas de la realidad, pero estas herramientas no eran ni por asomo, consideradas, geometría o aritmética.

En el moderno cálculo integral se amalgaman dos ideas renovadoras de la matemática del pueblo griego; el hecho de que los fenómenos de la naturaleza podían estudiarse mediante la matemática , y los métodos que ideó Arquímedes para llevar a cabo tal cuestión.
Estas dos ideas unidas al concepto de función - concepto este último que adquirió fuerza durante el Renacimiento- harían del cálculo integral la más formidable herramienta para estudiar la realidad circundante.

Arquímedes llevó tan lejos estas ideas que fue capaz de calcular longitudes de arcos, cuadrar la parábola, calcular el área y volumen de la esfera, calcular el área de segmentos de la esfera y el cilindro, calcular el volumen de elipsoides de revolución y de segmentos de elipsoide; el volumen de revolución de paraboloides,de hemisferios, de un segmento esférico, de un segmento de elipsoide, de un segmento de hiperboloide. Problemas todos que están en la base de la construcción de embarcaciones, puentes, represas , edificaciones, etc, y que ahora, mediante el cálculo integral, pueden resolverse fácilmente.

Los cálculos de los centros de gravedad de figuras planas acotadas por rectas tales como el triángulo, el rectángulo, el paralelogramo, etc., no ofrecieron mayor dificultad a Arquímedes, pero, para los casos que hemos mencionado debió realizar ingentes esfuerzos geométricos.

Las ideas de Arquímedes encontraron un rico caldo de cultivo durante el Renacimiento. Sus ideas, que habían dormido durante casi dos mil años , encontraron en Tartaglia, Galileo,Kepler, Cavalieri, Fermat, Descartes, Newton y Leibnitz el genio necesario para inventar métodos más poderosos que los que habían diseñado los matemáticos griegos.

Aunque Arquímedes es el artífice de los nuevos métodos de trabajo y de las ideas que lo transformaron en el primer hombre moderno de la antiguedad ,sería injusto no señalar que aparte de él, Eudoxo, Duocles, Eratóstenes, Nicomedes, Apolonio de Perga y algunos otros, sembraron también la semillas cuya abundante cosecha sería recogida finalmente por Newton y Leibnitz.

II. OBJETIVOS GENERALES

1. Seguir desarrollando el buen uso del lenguaje lógico matemático, mediante la presentación rigurosa de los temas del cálculo y la geometría analítica.

2. Seguir desarrollando la capacidad del estudiante para reconocer, plantear y resolver problemas de diversas disciplinas, mediante el uso del cálculo.

3. Dar a conocer al estudiante, el desarrollo histórico del cálculo, de modo que entienda la matemática como una disciplina dinàmica que ha ido resolviendo diversos problemas de la naturaleza a lo largo del tiempo.

4. Poveer al estudiante de los conocimientos de cálculo diferencial e integral en una variable, que son parte primordial de su formación básica en matemática.

III. OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Que el estudiante asimile las propiedades de las funciones trigonométricas , trigonométricas inversas, hiperbólicas, exponenical y logaritmo, para trabajar con ellas en cálculo diferencial e integral.

2. Que el estudiante domine las diversas técnicas de integración e integración impropia.

3. Que el estudiante sea capaz de resolver límites que involucran formas indeterminadas.

4. Proveer al estudiante de algunas herramientas que nos brinda la geometría analítica tales como coordenadas polares y secciones cónicas

5. Que el estudiante conozca el lenguaje básico de sucesiones y series numéricas y pueda determinar convergencia o no de las mismas, mediante el uso de los diferentes métodos de que disponemos.

6. Que el estudiante conozca las series de potencias y sus propiedades, especialmente en lo que se refiere a cálculo diferencial e integral.

IV Programa del curso

El estudio del cálculo debe ser global y consistente, no únicamente una colección de conocimientos dispersos y desligados unos de otros. Por esta razón, se recomienda escoger un mismo libro de texto a lo largo de toda la secuencia. El programa que aquí presentamos es una guía de los temas usuales del cálculo, que pueden variar poco de un libro de cálculo a otro.

Es importante tener en cuenta que lo más importante al escoger un texto es, que mediante el uso del mismo se pueda cumplir con los objetivos del curso, plasmados en la introducción, objetivos generales y objetivos específicos. Al final de este programa se incluye bibliografía, acorde con estos objetivos y el nivel que se quiere dar al curso.

1. Funciones inversas, logarítmicas y exponenciales.

   a. Funciones inversas. Teorema sobre la inversa de una función monótona y continua.
   b. Derivada de la inversa de una función.
   c. Función logaritmo natural.
   d. Derivación logarítmica.
   e. Integrales que producen la función logaritmo natural.
   f. Función exponencial. Aplicaciones.
   g. Otras funciones exponenciales y logarítmicas.

2. Funciones trigonométricas inversas e hiperbólicas.

   a. Funciones trigonométricas inversas. Derivadas de estas funciones
   b. Integrales que producen funciones trigonométricas inversas.
   c. Funciones hiperbólicas.
   d. Funciones hiperbólicas inversas.

3. Técnicas de integración

   a. Integración mediante tablas
   b. Integración por partes
   c. Integración de potencias de las funciones trigonométricas.
   d. Integración por sustitución trigonométrica
   e. Integración de funciones racionales, usando fracciones parciales.
   f. Integración de funciones racionales del seno y el coseno
   g. Otras sustituciones
   h. Integración numérica
   i. Integrales que producen funciones hiperbólicas inversas.
   j. Integrales definidas por recurrencia.

4. Formas indeterminadas , integrales impropias y fórmulas de Taylor.

   a. Formas indeterminadas. Cálculo de límites
   b. Integrales impropias.
   c. Fórmulas de Taylor.

5. Coordenadas polares y secciones cónicas.

   a. Sistema de coordenadas polares. Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares.
   b. Area de una región en coordenadas polares.

c. Traslación de ejes.
d. La parábola, la elipse y la hipérbola.
e Rotación de ejes.
f. Ecuaciones de las secciones cónicas en coordenadas polares.
g. Rectas tangentes a curvas en coordenadas polares.

6. Sucesiones y Series Numéricas.

a. Sucesiones. Sucesiones monótonas y acotadas
b. Series numéricas. Propiedades.
c. Criterios de convergencia para series de términos positivos.
d. Criterio de la integral.
e. Series alteradas.
f. Convergencia absoluta y condicional . Criterios de la razón y de la raíz

7. Series de Potencias

a. Series de Potencias. Radio de convergencia
b. Derivación de Series de Potencias.
c. Integración de Series de Potencias
d. Serie de Taylor.
e. Serie del binomio.

V BIBLIOGRAFIA

La bibliografía que se incluye en este programa pretende ser una guía para el profesor y el estudiante , en cuanto al nivel de presentación de los temas incluídos en el programa . El profesor puede ampliarla con otros libros de referencia de su preferencia.

- Apóstol Tom, Calculus Volumen I. Xerox College Publishing.1967.

- Demidovich Boris, Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial Mir 1973.

- Eves H.H., History of Mathematics. Holt, Risebart and Winston. 1964.

- Leithold Lowis, El Cálculo con Geometría Analítica.Editorial Harla.1987.

- Priestly , Calculus: An Historical approach. Springer- Verlag. 1979.

- Ross , Elementary Analysis: The Theory of Calculus. Springer-Verlag. 1980.

- Salmon G.,A. Treatise on Conic Sections . Chelsea .1954.